Durée de l'épreuve : 2H

Devoir de contrôle n°3

Classe : 4M2

Prof: Dhaouadi Nejib

Problème

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

Partie A

1) *Justifier l'existence de F(x) sur* $\mathbb{R}$.

2) *Etudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.*

3) a) *Vérifier que pour tout* $t\in[2,+\infty[$ *on a :* $e^{-t^2}\le e^{-2t}$.

En déduire que pour tout $x\ge 2$, $F(x)\le \dfrac{1-e^{4-2x}}{2e^4}+\int_0^2 e^{-t^2}dt$.

b) *Prouver que pour tout* $x\ge 2$, $F(x)\le \dfrac{1}{2e^4}+\int_0^2 e^{-t^2}dt$.

4) *Montrer que F est majorée sur* $\mathbb{R}$ *et que F possède une limite finie L en* $+\infty$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-x}{\cos^2 t}}dt$.

1) *Montrer que pour tout réel* $x\ge 0$, $0\le f(x)\le e^{-x}$ *et calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) *On pose, pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *et pour tout* $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(t)=F(x\tan t)$.

a) *Montrer g est dérivable sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ *et que* $g'(x)=\dfrac{x}{\cos^2 t}e^{-x^2\tan^2 t}$

b) *En déduire que pour tout* $x\in\mathbb{R}$, *on a :* $F(x)=x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{e^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t}dt$.

3) *En admettant que f est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que:* $f'(x)=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{e^{\frac{-x}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}dt$.

Prouver que pour tout $x\in\mathbb{R}$ *on a :* $\left[f(x^2)\right]'=-2e^{-x^2}F(x)$.

4) *Soit h la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $h(x)=f(x^2)+\left[F(x)\right]^2$.

a) Montrer que h est une fonction constante que l'on précisera.

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie C

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$U_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t^2} dt$ et $V_n = \lim\limits_{x \to +\infty} U_n(x)$.

1) Vérifier que $V_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $V_n = \frac{n-1}{2} V_{n-2}$.

b) En déduire que : $V_n \cdot V_{n+1} = \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^{n+2}}$.

c) Déterminer alors les termes V_3 et V_4.

Correction

Partie A

1) La fonction $\varphi : x \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc F existe pour tout réel x.

2) La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ d'où F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction φ est paire donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-x}^{x} \varphi(t)dt = 2\int_{0}^{x} \varphi(t)dt$ (voir cours)

$$\int_{-x}^{x} \varphi(t)dt = 2\int_{0}^{x} \varphi(t)dt \Leftrightarrow \int_{-x}^{0} \varphi(t)dt + \int_{0}^{x} \varphi(t)dt = 2\int_{0}^{x} \varphi(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{-x}^{0} \varphi(t)dt = \int_{0}^{x} \varphi(t)dt \Leftrightarrow -\int_{0}^{-x} \varphi(t)dt = \int_{0}^{x} \varphi(t)dt \Leftrightarrow \int_{-x}^{0} \varphi(t)dt = -\int_{0}^{x} \varphi(t)dt$$

Ce qui donne $F(-x) = -F(x)$ d'où F est impaire.

<u>Autrement</u>

On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = F(-x) + F(x)$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$G'(x) = -F'(-x) + F'(x) = -\varphi(-x) + \varphi(x) = 0$ car φ est paire.

Donc il existe une constante réelle c telle que <u>pour tout réel x</u>, $G(x) = c$

Et pour trouver la constante c, il faut choisir une valeur convenable pour x.

Dans ce cas pour $x = 0$, on trouve $c = 2F(0) = 2\int_{0}^{0} \varphi(t)dt = 0$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = -F(x)$

3) a) Pour $t \geq 2$, on a $-t^2 + 2t = t(-t+2) \leq 0 \Rightarrow -t^2 \leq -2t$ or la fonction exp est croissante donc $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$

Soit $x \in [2, +\infty[$. $\forall t \in [2, x]$, $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$ donc $\int_{2}^{x} \varphi(t)dt \leq \int_{2}^{x} e^{-2t}dt$

$$\int_{2}^{x} \varphi(t)dt \leq \int_{2}^{x} e^{-2t}dt \Leftrightarrow F(x) - F(2) \leq \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_{2}^{x} \Leftrightarrow F(x) \leq F(2) - \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq \int_{0}^{2} e^{-t^2}dt + \frac{e^{-4} - e^{-2x}}{2} \Leftrightarrow F(x) \leq \int_{0}^{2} e^{-t^2}dt + \frac{1 - e^{4-2x}}{2e^4}$$

b) $x \geq 2 \Leftrightarrow -2x \leq -4 \Leftrightarrow 4 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < e^{4-2x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - e^{4-2x} < 1$

Donc $\frac{1 - e^{4-2x}}{2e^4} \leq \frac{1}{2e^4}$ et par suite $F(x) \leq \int_{0}^{2} e^{-t^2}dt + \frac{1}{2e^4}$ pour tout réel $x \geq 2$.

4) La fonction F est croissante et majorée sur $\mathbb{R}$ *donc elle admet une limite finie L en* $+\infty$ *(Résultat de cours)*

Partie B

1) $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos t \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \cos^2 t \le 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\cos^2 t} \le 1$

Donc pour $x \ge 0$, $\frac{-x}{\cos^2 t} \le -x$ *donc* $0 < e^{\frac{-x}{\cos^2 t}} \le e^{-x}$

d'où $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-x}{\cos^2 t}} dt \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} dt = \frac{\pi}{4} e^{-x} \le e^{-x}$ *ce qui donne* $\mathbf{0 \le f(x) \le e^{-x}}$.

Et puisque $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ *donc, d'après le théorème des gendarmes,* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2) *Pour tout réel x, on associe la fonction g définie sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *par:*

$g(t) = F(x \tan t)$. *On a* $g = F o \psi$ *où* ψ *est la fonction :* $t \mapsto x\tan t$

a) $\begin{cases} \text{La fonction } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \text{La fonction } \psi \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

Donc g *est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et* $g'(t) = \psi'(t) \cdot F'(\psi(t)) = \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t}$.

b) $g'(t) = \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t}$ *et* $g(0) = F(0) = 0$ *donc* $g(t) = \int_0^u \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t} dt$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t} dt$ *donc* $F(x) = x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt$.

3) $\left[f(x^2)\right]' = 2xf'(x^2) = -2x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} e^{\frac{-x^2}{\cos^2 t}} dt = -2x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2(1+\tan^2 t)}}{\cos^2 t} dt$

$$= -2x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2} \cdot e^{-x^2 \tan^2 t)}}{\cos^2 t} dt = -2e^{-x^2}\left(x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t)}}{\cos^2 t} dt\right)$$

Donc $\left[f(x^2)\right]' = -2e^{-x^2} F(x)$

4) $h(x) = f(x^2) + \left[F(x)\right]^2$

a) *h est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a:*

$h'(x) = \left[f(x^2)\right]' + 2F'(x)F(x) = -2e^{-x^2} F(x) + 2e^{-x^2} F(x) = 0$

Donc h est constante sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(0) = f(0) + [F(0)]^2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$.

b) On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x^2) = \lim_{X \to +\infty} f(X) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = L$

Or pour tout réel x, on a $f(x^2) + [F(x)]^2 = \frac{\pi}{4}$ donc par passage à la limite en $+\infty$, on obtient $L^2 = \frac{\pi}{4}$ et puisque $L \geq 0$ (car F positive sur $[0, +\infty[$) alors $\mathbf{L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

Partie C

$U_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t^2} dt$ et $V_n = \lim_{x \to +\infty} U_n(x)$!!!

1) $V_0 = \lim_{x \to +\infty} U_0(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, on trouve

$$U_{n-2}(x) = \left[\frac{e^{-t^2} t^{n-1}}{n-1}\right]_0^x + \frac{2}{n-1} U_n(x) = \frac{e^{-x^2} x^{n-1}}{n-1} + \frac{2}{n-1} U_n(x) \quad (n \geq 2) \quad (*)$$

Montrons que $\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} x^{n-1} = 0$

* $ln\left(e^{-x^2} x^{n-1}\right) = -x^2 + (n-1) \ln x = x^2 \left(-1 + (n-1)\frac{\ln x}{x^2}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(-1 + (n-1)\frac{\ln x}{x^2}\right) = -\infty$ d'où $\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} x^{n-1} = 0$

Par passage à la limite en $+\infty$ dans l'égalité (*) on obtient : $V_{n-2} = \frac{2}{n-1} V_n$

Ou encore $V_n = \frac{n-1}{2} V_{n-2}$ pour tout entier $n \geq 2$.

b) Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n ; $V_n \cdot V_{n+1} = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^{n+2}}$

*Pour n=0 on a: Vérifions que $V_0 V_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

$$U_1(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}\int_0^x (-2t) e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^x = -\frac{1}{2}\left(e^{-x^2} - 1\right)$$

$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$ donc $V_1 = \lim_{x \to +\infty} U_1(x) = \frac{1}{2}$ et par suite $V_0 V_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

*Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $V_n V_{n+1} = \dfrac{n!\sqrt{\pi}}{2^{n+2}}$ et montrons que $V_{n+1} V_{n+2} = \dfrac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+3}}$

$$V_{n+1}V_{n+2} = V_{n+1} \times \frac{n+1}{2} V_n = \frac{n+1}{2} V_n V_{n+1} = \frac{n+1}{2}\,\frac{n!\sqrt{\pi}}{2^{n+2}} = \frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+3}}.$$

c) $V_3 = \dfrac{3-1}{2} V_1 = V_1 = \dfrac{1}{2}$ et $V_3 V_4 = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{16}$ donc $V_4 = \dfrac{1}{V_3}\,\dfrac{3\sqrt{\pi}}{16} = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{8}$