Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°2

Classe : 4ème Maths

Date : 01/02/2012

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$.

1) a) *Montrer qu'il existe une similitude directe f qui transforme A en I et B en O.*

b) *Déterminer le rapport et l'angle de f.*

c) *Construire son centre* Ω.

d) *Montrer que* $f(D) = A$ *et déduire que les points* Ω, I *et* D *sont alignés.*

2) *On pose* $g = foS_{(BD)}$ *et on note* ω *le point tel que* $\overrightarrow{D\omega} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DA}$.

a) *Montrer que g est une similitude indirecte et préciser son rapport.*

b) *Déterminer* $g(B)$, $g(C)$, $g(D)$ *et* $g(O)$.

En déduire que ω *est le centre de la similitude indirecte g.*

c) *Déterminer* $gog(B)$ *et déduire une construction de w.*

d) *Montrer que l'axe* Δ *de g est la perpendiculaire à (AD) en* ω.

e) *L'axe* Δ *coupe la droite (ID) en J.*

Montrer que les points ω, Ω, J *et* A *appartiennent à un même cercle.*

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ *par :* $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) *Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats trouvés.*

b) *Etudier la dérivabilité de f à droite en* -1 *et interpréter graphiquement le résultat trouvé.*

2) a) *Montrer que f est dérivable sur* $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ *et que* $\forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$,

$$f'(x) = \frac{x(3x+2)}{2\sqrt{x^2(x+1)}}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à $(O,\vec{i})$ dans le même repère que $\mathscr{C}$ et donner une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

1) Etudier les variations de f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note f^{-1} sa fonction réciproque.

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J\setminus\{1\}$ et expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

4) f^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ? Justifier votre réponse.

5) Expliciter $f^{-1}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$ pour tout $x\in\left]0,\pi\right[$.

Correction du devoir

Exercice 1

1) a) $AB \neq 0$ et $IO \neq 0$ donc il existe (et unique) une similitude f qui transforme A en I et B en O.

b) Le rapport $k = \frac{IO}{AB} = \frac{IO}{2IO} = \frac{1}{2}$ et l'angle $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

c) $\begin{cases} f(A) = I \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Rightarrow \Omega \in \text{au cercle } \mathscr{C} \text{ de diamètre } [AI] \\ f(B) = O \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Rightarrow \Omega \in \text{au cercle } \mathscr{C}' \text{ de diamètre } [BO] \end{cases} \Rightarrow \Omega \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$

$f(A) = I \Leftrightarrow f^{-1}(I) = A \neq I$ donc $\Omega \neq I$.

Donc Ω est l'autre point d'intersection autre que I (Voir figure).

d) L'angle de f est $\frac{\pi}{2}$ donc l'image d'une droite est une droite qui lui est perpendiculaire.

$f\left((AD)\right)$ est la perpendiculaire à (AD) passant par f(A) et $f\left((BD)\right)$ est la perpendiculaire à (BD) passant par f(B) donc $f\left((AD)\right) = (AB)$ et $f\left((BD)\right) = (AO)$

Et puisque $(AD) \cap (BD) = \{D\}$ et $(AB) \cap (AO) = \{A\}$ alors $\boxed{f(D) = A}$.

$f(A) = I$ et $f(D) = A \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega A}}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$(\widehat{\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega I}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega A}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi \equiv 0 \quad [\pi] \Rightarrow \Omega, I, D$ sont alignés

2) a) $g = foS_{(BD)}$ est la composé d'une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'une similitude indirecte de rapport 1 donc c'est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

b) $g(B) = f\left(S_{(BD)}(B)\right) = f(B) = O$, $g(C) = f\left(S_{(BD)}(C)\right) = f(A) = I$

$g(D) = f\left(S_{(BD)}(D)\right) = f(D) = A$.

O milieu de $[BD]$ donc $g(O)$ milieu de $g([BD]) = [OA]$ noté K (voir figure)

$\overrightarrow{D\omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{D\omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et par passage aux images par g on obtient $\overrightarrow{Ag(\omega)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IO}$

$$\overrightarrow{Dg(\omega)} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{Ag(\omega)} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{D\omega} \Rightarrow g(\omega) = \omega$$

c) $gog(B) = g\left(g(B)\right) = g(O) = K$.

On sait que $gog = h\left(w, \frac{1}{4}\right)$ *et puisque* $gog(B) = K$ *alors* $w \in (BK)$

On a aussi $\overrightarrow{D\omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$ *donc* $w \in (DA)$ *d'où* $w \in (DA) \cap (BK)$ *(voir figure)*

d) $g(D) = A \Rightarrow \Delta$ *porte la bissectrice intérieure de l'angle* $\widehat{D\omega A}$

Or $\widehat{D\omega A}$ *est un angle plat donc* Δ *est la perpendiculaire à (DA) passant par w.*

e) Le triangle AJw est rectangle en w donc w appartient au cercle $\mathscr{C}$ *de diamètre* $[AJ]$.

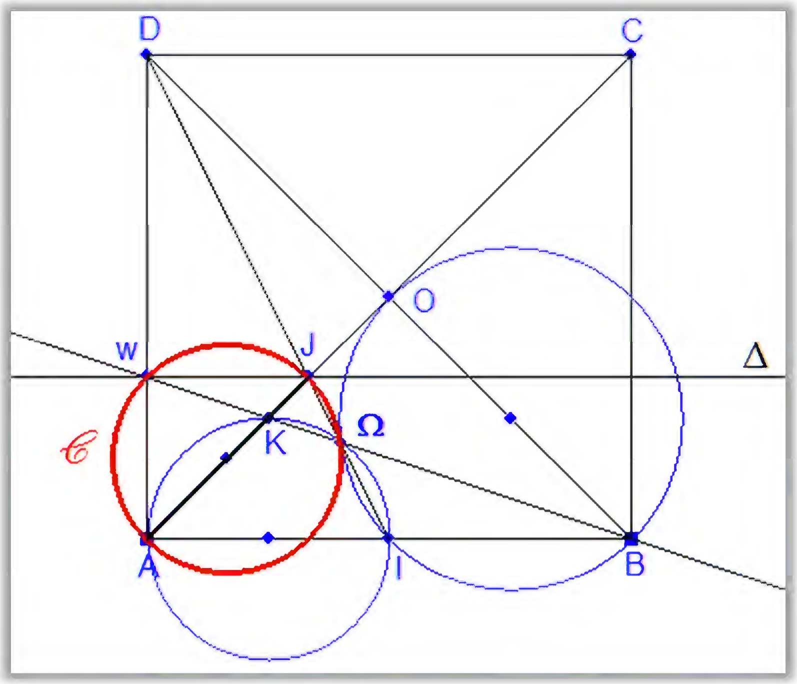
De même on sait que $(\Omega D) \perp (\Omega A)$ *et que* Ω, I, D *sont alignés et* $J \in (ID)$

Donc $(\Omega J) \perp (\Omega A)$

et par suite $\Omega \in \mathscr{C}$

<u>*Conclusion :*</u>

Les points w, Ω, A *et* J *appartiennent à un même cercle.*



Exercice 2

1) a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+1} = 1$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $\boxed{f_d'(0) = 1}$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0^-}(-\sqrt{x+1}) = -1$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et $\boxed{f_g'(0) = -1}$.

$f_d'(0) \neq f_g'(0) \Rightarrow f$ *n'est pas dérivable en 0.*

<u>*Interprétation graphique*</u> :

La courbe $\mathscr{C}$ *admet, au point d'abscisse 0, deux demi tangentes*

$T_1 : y = x, x \geq 0$ *et* $T_2 : y = -x, x \leq 0$.

b)

$$\boxed{\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-x\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-x}{\sqrt{x+1}}=+\infty}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en -1.

<u>Interprétation graphique</u> : La courbe $\mathscr{C}$ admet, au point d'abscisse -1, une demi tangente verticale.

2) a) La fonction $x\mapsto x^2(x+1)$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$ et $\forall x\in\,]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, $x^2(x+1)>0$ donc f dérivable sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$

$$\boxed{\forall x\in\,]-1,+\infty[\setminus\{0\},\quad f'(x)=\frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^2(x+1)}}=\frac{x(3x+2)}{2\sqrt{x^2(x+1)}}}.$$

b)

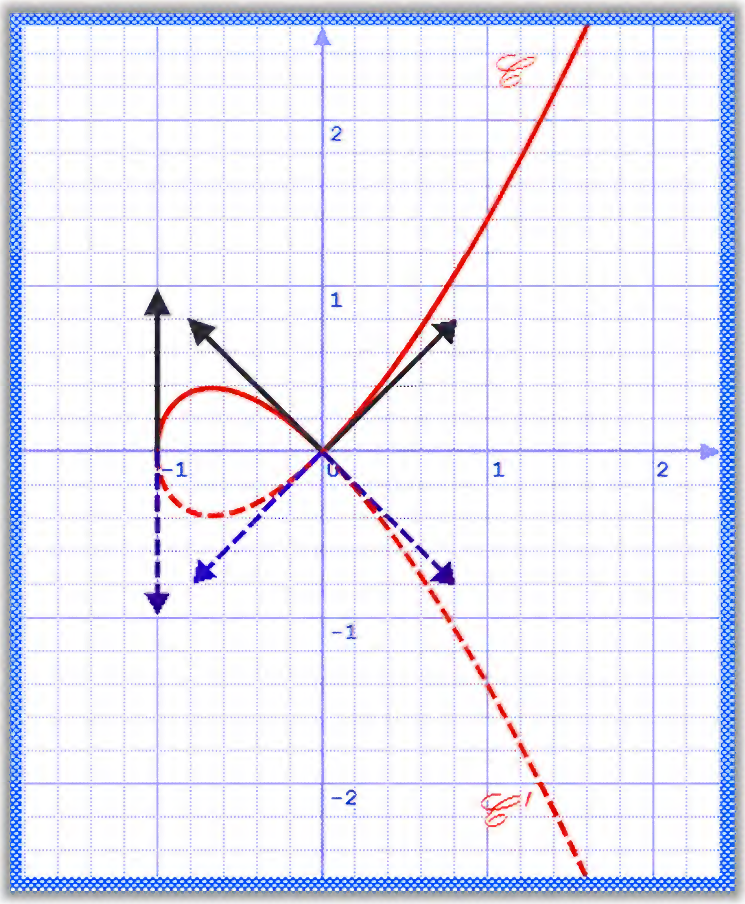
x	-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$3)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$$

Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet, au voisinage de $+\infty$ une branche infinie de direction asymptotique celle de $(O,\vec{j})$.

4) (Voir figue)



$$M(x,y)\in\mathscr{C}\cup\mathscr{C}'\Leftrightarrow\begin{cases}M\in\mathscr{C}\\ ou\\ M\in\mathscr{C}'\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{x^2(x+1)}\\ ou\\ y=-\sqrt{x^2(x+1)}\end{cases}\Leftrightarrow y^2=x^2(x+1)$$

La courbe $\mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$ *admet pour équation cartésienne* $\boxed{y^2 = x^2(x+1)}$ *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 3

1) f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = \dfrac{-2\cos x \sin x}{\sin^4 x} = \dfrac{-2\cos x}{\sin^3 x} \leq 0$ (avec seulement $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$)

donc f est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	0
$f(x)$	$+\infty \searrow$	1

2) f est continue et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $J = [1, +\infty[$.

3) $\begin{cases} f \text{ dérivable sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f'(x) = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \Big| f^{-1} \text{ dérivable sur } f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]1, +\infty[$

$$\forall x \in]1, +\infty[\,, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{f'(y)} \qquad \text{avec} \quad y = f^{-1}(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = \frac{1}{\sin^2 y} \Leftrightarrow \sin y = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{car} \quad \sin y > 0 \quad \text{pour} \quad y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = -\frac{\sin^3 y}{2\cos y} = -\frac{\sin^3 y}{2\sqrt{1-\sin^2 y}} = -\frac{\frac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{\frac{x-1}{x}}} = \frac{-1}{x\sqrt{x-1}}$$

Donc $\boxed{\forall x \in]1, +\infty[\,, \quad (f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x-1}}}$

4) f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et $f'_g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc la courbe de f, dans un repère orthonormé, admet à gauche au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ une demi tangente horizontale et par raison de symétrie, par rapport à la première bissectrice du repère, la courbe de f^{-1} admet au point d'abscisse 1 une demi tangente verticale. Donc f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 1.

5) __Premier cas__ : $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. $f^{-1}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x$

__Deuxième cas__ : $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. $f^{-1}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = f^{-1}\left(\dfrac{1}{\sin^2(\pi - x)}\right) = f^{-1}\left(f(\pi - x)\right) = \pi - x$

Car $\pi - x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.