Epreuve	Devoir de contrôle n°3	Professeur
Mathématiques	Classe : $4^{ème}$ ScExp	Dhaouadi Nejib
Durée : 2H	Avril 2014	

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère l'ensemble (S) *des points* $M(x,y,z)$ *tels que* $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z+8=0$.

Soit m *un réel et* P_m *le plan d'équation* $2x-y+2z+m=0$.

1) Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

2) Etudier suivant les valeurs de m, la position de (S) et P_m.

3) Montrer que $(S)\cap P_4$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit D la droite passant par le point $A(2,1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q contenant la droite D et perpendiculaire à P_m est : $x-2y-2z+2=0$.

   b) Montrer que Q est tangent à la sphère (S) en un point H dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, *on pose* $I_n=\int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$.

1) A l'aide d'une integration par parties, calculer I_1.

2) A l'aide d'une integration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $3I_{n+1}+(n+1)I_n=e^3$.

3) En déduire I_2.

4) a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $I_n\geq 0$.

   b) Déduire alors que pour tout entier naturel non nul n, $I_n\leq \dfrac{e^3}{n+1}$.

5) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 3

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

On désigne par $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

1) *Montrer que* f *est impaire.*

2) *Vérifier que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

3) a) *Montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$.

b) *Drésser le tableau de variation de* f.

4) *Soit* x *un réel positif .*

a) *Montrer que* $\forall\, t \in [0, x],\ \ 0 \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{2}$.

b) *En déduire alors que :* $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}x$.

5) a) *Donner une équation de la tangente* T *à la courbe* $\mathscr{C}$ *au point d'abscisse* 0.

b) *Tracer la tangente* T *et la courbe* $\mathscr{C}$.

6) a) *Montrer que* f *admet une fonction réciproque notée* g *et préciser son domaine de définition* D.

b) *Montrer que pour tout* $x \in D$, $g(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$.

c) *Tracer dans le même repère la courbe* $\mathscr{C}'$ *représentation graphique de* g.

7) *On désigne par* A *l'aire de la région du plan limitée par les courbes* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *et les droites d'équations* $x = 1$ *et* $y = 1$.

a) *Vérifier que pour tout réel* x, $f(x) = 1 - \dfrac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

b) *En déduire alors que* $A = -1 + 4\ln\left(\dfrac{2e}{1 + e}\right)$.