Devoir de synthèse N°1

Exercice N°1 (4 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux**. (Aucune justification n'est demandée)

❶ *On considère dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E): z^2 - 2mz + 1 = 0$ *avec* $m \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\}$

On désigne par z' *et* z'' *les solutions de* (E) *alors:* $\arg(z') + \arg(z'') \equiv 0\,[2\pi]$

❷ *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction* $f : x \mapsto (x^2 - x)(x-2)$ *admet exactement deux tangentes horizantales.*

❸ *Soit A et B deux points distincts. L'application* $S_A \circ S_B$ *est la translation* $t_{2\overrightarrow{AB}}$

❹ *La seule isométrie fixant trois points distincts est l'identité* .

Exercice N°2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. *On donne les points A et B d'affixes respectives* 1 *et* $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour chaque point M du plan, d'affixe z, on désigne par M_1 *d'affixe* z_1*, l'image de M par la rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *puis par* M'*, d'affixe* z'*, l'image de* M_1 *par la translation de vecteur* $-\vec{u}$.

On note T la transformation qui, à chaque point M, associe le point M'.

❶ a) *Démontrer que* $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1$

b) *Déterminer l'image du point B par T*

c) *Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.*

❷ *On pose* $z = x + iy$*, avec x et y réels.*

a) *On prend* $z \neq 0$; *calculer la partie réelle du quotient* $\frac{z'}{z}$ *en fonction de x et de y.*

b) *Demontrer que l'ensemble* (Γ) *des points du plan tels que le triangle* OMM' *soit rectangle en O, est un cercle privé de deux points, dont on précisera le centre et le rayon. Tracer* (Γ).

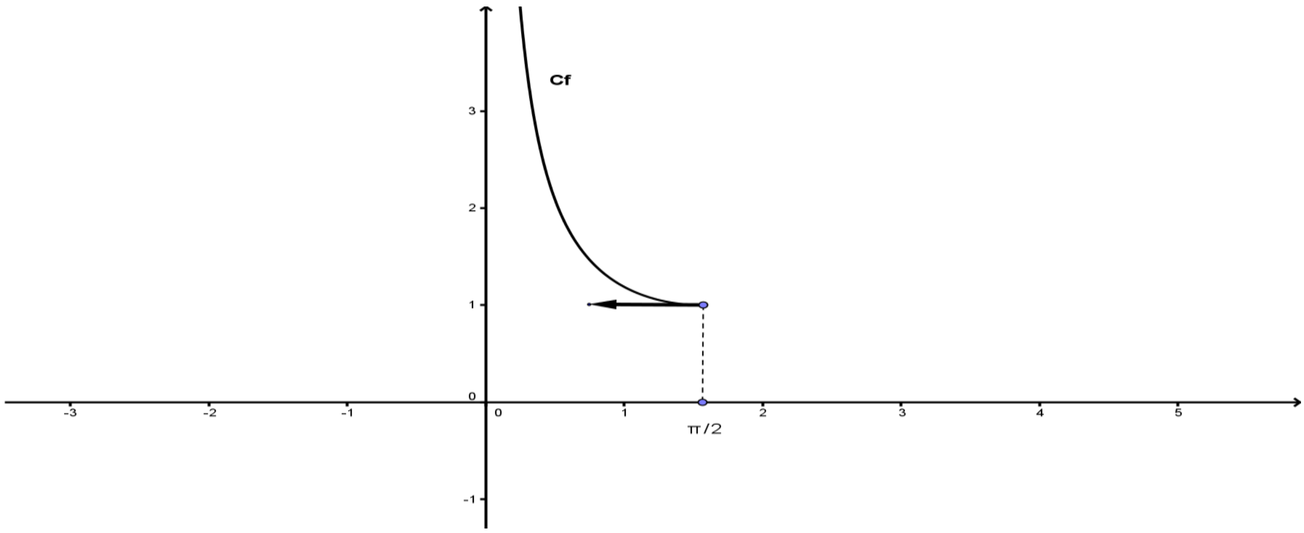
❸ *Dans cette question, on pose* $z = 1 + i$.

a) *Vérifier que* $M \in (\Gamma)$ *et placer M et* M' *sur la figure.*

b) *Calculer* $|z'|$ *et l'aire du triangle* OMM' *en* cm^2.

Exercice N°3 **(5 points)**

Soit f la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *par* $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$. *Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$



❶ *Dresser le tableau de variation de f sur* $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

❷ *Soit* $h(x)=\ f(x)+\dfrac{1}{4}$, *pour tout* $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

a) *Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet une solution unique* $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$

b) *Montrer que pour tout réel* $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$, *on a* $|h'(x)|\leq\dfrac{2}{3}$

❸ *Soit (Un) la suite définie par* $\begin{cases}U_0=\dfrac{\pi}{2}\\ U_{n+1}=h(u_n)\quad \textit{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{\pi}{3}\leq U_n\leq\dfrac{\pi}{2}$

b) *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$

c) *En déduire que (Un) est convergente et déterminer sa limite .*

Exercice N°4 **(6 points)**

Dans le plan orienté , on considère un triangle équilatéral direct ABC.
Soient H le milieu de $[BC]$, $(\mathrm{C}\,)$ le cercle de centre A et de rayon AC, et D le point d'intersection de la demi − droite $[HA)$ et (C). On considère aussi D' l'image de D par

La symétrie orthogonal d'axe (AC).

❶ *Montrer qu'il existe un unique déplacement* f *transformant* B *en* C *et* D *en* D'.
Déterminer la nature et les caractéristiques de f .

❷ *Soient* E *le point d'intersection de la droite* (AC) *et du cercle* (C), *et* $h = S_{(DH)} \circ S_{(BE)}$

a) *Déterminer la nature et les caractéristiques de la transformation* h .

b) *En déduire que le point* A', *image de* A *par* $S_{(BE)}$, *appartient à* (C).

❸ *Soit* $D"$ *l'image de* D' *par la translation de vecteur* $\overrightarrow{BC}$.

a) *Montrer que le point* $D"$ *appartient à la droite* (DC).

b) *Montrer que* $A'D' = DD"$.

❹ *Montrer qu'il existe un unique antidéplacement* g *transformant* D' *en* D *et* A *en* D'.

❺ *Soient* P *et* Q *les milieux respectifs de* $[DD']$ *et* $[AD']$.

a) *Montrer que* $g(Q) = P$.

b) *Montrer que* g *n'a pas de point invariant*.

c) *Donner la forme réduite de* g .

Bon Travail