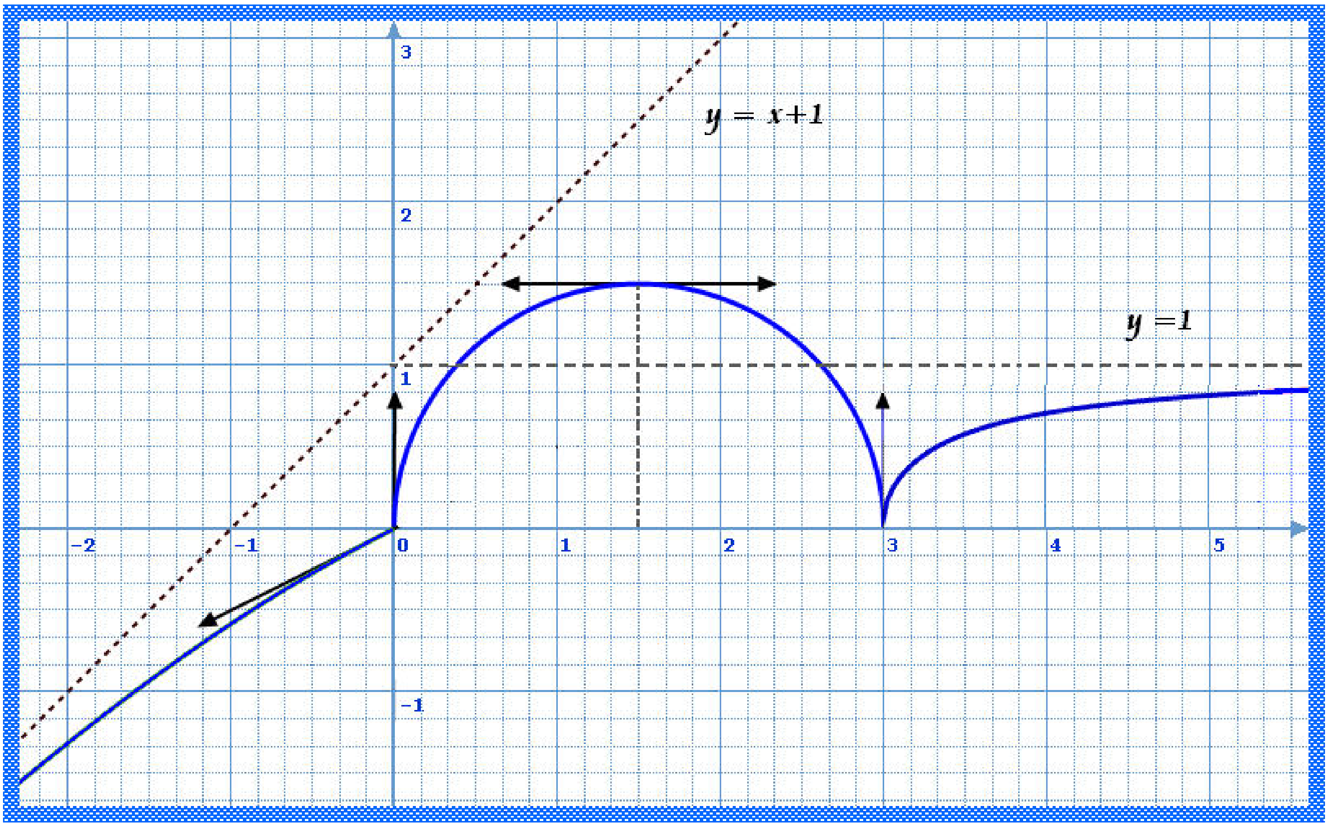
Épreuve Mathématiques
Durée 3H

Devoir de synthèse n°1

Classes: 4Maths 1 & 2

Professeur Dhaouadi Nejib

Exercice1



La courbe ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Cette courbe admet deux asymptotes d'équations $y = 1$ *et* $y = x + 1$.

A l'aide d'une lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1) Déterminer les limites éventuelles suivantes:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} \quad ;$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{2f(x)-3}{2x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) - x \quad ; \quad \lim_{x\to3} \frac{f(x)}{x-3}$$

2) f est elle dérivable en 3 ? Justifier votre réponse.

3) f est elle dérivable en 0 ? Justifier votre réponse.

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Discuter, suivant le paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $]-1,3[$ par $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in\,]-1,3[$, $f'(x)=\dfrac{4}{\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que le point $A(1,0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

d) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

e) Construire la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,3[$ sur $\mathbb{R}$.

On note g sa fonction réciproque.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère que $\mathscr{C}$.

c) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3) a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $0<g'(x)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet, dans $[1,+\infty[$, une solution unique α et que $\alpha\in\,]2,3[$.

4) Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0\geq 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=g(u_n)$.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq 1$.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\alpha|$.

c) En déduire que la suite u est convergente et préciser sa limite.

Exercice n°3

1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et on considère les points:

- ⇨ A d'affixe a, $a\in\mathbb{R}$.
- ⇨ B d'affixe $b+i$, $b\in\mathbb{R}$.
- ⇨ B' image de B par la rotation r.

a) Déterminer l'affixe du point B' en fonction de a et b

b) Montrer que B' appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si $a+b=\sqrt{3}$

c) Exprimer, dans ce cas, l'affixe du point B' en fonction de a.

2) Dans cette question, on pose $a = \sqrt{3}$ et $b = 0$.

On considère les points C d'affixe $c = -i$ et D d'affixe $d = 2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$.

a) Quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Calculer le quotient $\dfrac{d-a}{c-a}$. Que peut-on déduire pour le triangle ACD ?

c) Déterminer l'affixe du point E, image de D par la rotation r..

d) Déterminer l'affixe du point F, image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

e) Montrer que le triangle BEF est équilatéral.

Exercice n°4

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. On désigne par :

- A' le milieu de $[BC]$.
- I_1 le milieu de $[AB]$.
- I_2 le milieu de $[AC]$.
- Ω le symétrique de A' par rapport à (AC).
- $\mathscr{C}_1$ le cercle de diamètre $[AB]$ et $\mathscr{C}_2$ le cercle de diamètre $[AC]$.
- r la rotation de centre A et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A' et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

1) a) Montrer que $r(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$.

b) Soit $M \in \mathscr{C}_1$ et $M' = r(M)$. Montrer que les points A', M et M' sont alignés.

2) Caractériser ror'.

3) Soit S la symétrie orthogonale d'axe (AA').

Déterminer $Sor(A)$ et $Sor(B)$ et puis caractériser Sor.

4) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On pose $r_1 = rot$ et $r_2 = tor$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de chacune des isométries r_1 et r_2.

b) On pose $M_1 = r_1(M)$ et $M_2 = r_2(M)$.

Déterminer $r_2 o r_1^{-1}(C)$ et déduire que $\overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{BM_2}$.

Correction du devoir de synthèse n°1

Classes: 4Maths 1 & 2

ExerciceI

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$ (Coefficient directeur de la demi tan gente à gauche de l'origine O)

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ (Demi tan gente verticale à droite de l'origine O, dirigée vers le haut.)

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{2f(x)-3}{2x-3}=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{f(x)-\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}}=0$ (Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0) ;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x=1$ car la droite d'équation $y=x+1$ asymptote à la courbe au voi sin age de $-\infty$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{f(x)}{x-3}=-\infty & \text{(demi tan gente verticale à gauche au po int d'abscisse 3, orientée vers le haut)}\\ \lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{f(x)}{x-3}=+\infty & \text{(demi tan gente verticale à droite au po int d'abscisse 3, orientée vers le haut)}\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{f(x)}{x-3}\neq\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{f(x)}{x-3}$ donc $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}$ n'existe pas.

2) f n'est pas dérivable en 3 car elle n'est pas dérivable à droite (et aussi à gauche) en 3.

3) f n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas dérivable à droite en 0.

4)

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

5) Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ est le nombre de points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y=m$.

D'où le tableau suivant:

m	$-\infty$	0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Nombre de solutions	*Une seule solution*	*Deux solutions*	*Trois solutions*	Deux solutions	*Deux solutions*	*Une seule solution*	*Aucune solution*	

Exercice n°2

1) a) *Pour tout* $x \in \left]-1, 3\right[$, on a:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{-x^2+2x+3} - (x-1)\dfrac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}}{\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^2} = \frac{-x^2+2x+3-(x-1)(-x+1)}{\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3}$$

$$= \frac{-x^2+2x+3+x^2-2x+1}{\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3} = \frac{4}{\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3}$$

b)

x	-1	3
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

c) *Montrons que pour tout* $x \in \left]-1, 3\right[$, $2-x \in \left]-1, 3\right[$ *et* $f(2-x) = -f(x)$

❖ $x \in \left]-1, 3\right[\Rightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow -3 < -x < 1 \Rightarrow -1 < 2-x < 3 \Rightarrow 2-x \in \left]-1, 3\right[$.

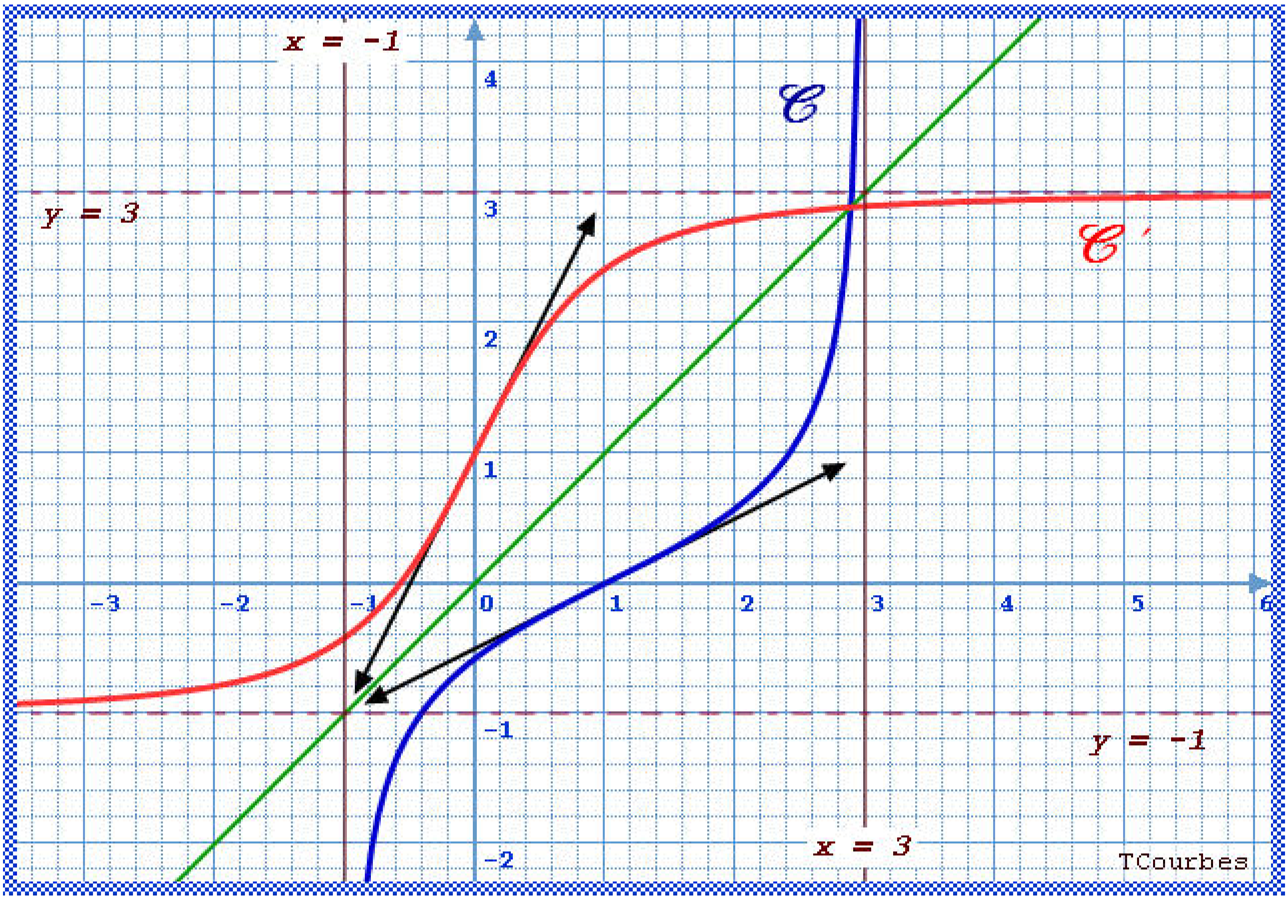
❖ $f(2-x) = \dfrac{(2-x)-1}{\sqrt{-(2-x)^2+2(2-x)+3}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{-4+4x-x^2+4-2x+3}}$

$$= \frac{-(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = -f(x)$$

donc A(1,0) est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

d) $T:\ y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}(x-1)$.

e)



2) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-1,3[$ donc elle réalise une bijection de $]-1,3[$ sur $f\left(]-1,3[\right)=\mathbb{R}$ (voir tableau de variation de f).

b) Voir figure précédente.

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\,]-1,3[$ tel que $g(x)=y$

$$g(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \frac{y-1}{\sqrt{-y^2+2y+3}}=x \Leftrightarrow x^2\left(-(y-1)^2+4\right)=(y-1)^2$$

c)

$$\Leftrightarrow -x^2(y-1)^2+4x^2=(y-1)^2 \Leftrightarrow (y-1)^2\left(1+x^2\right)=4x^2 \Leftrightarrow (y-1)^2=\frac{4x^2}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow |y-1|=\frac{2|x|}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow y-1=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ (car } x \text{ et } y-1 \text{ sont de même signe)}$$

Donc $g(x)=y=1+\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3) a) La fonction $x\mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a:

$$g'(x)=2\,\frac{\sqrt{1+x^2}-x\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=2\,\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}=\frac{2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}>0\,.$$

b) $x\geq 1 \Rightarrow 1+x^2\geq 2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2}\geq\sqrt{2}$ *donc* $\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3\geq 2\sqrt{2} \Rightarrow 0<\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Ce qui donne $0<g'(x)\leq\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Soit h la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $h(x)=g(x)-x$

h est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall x\in[1,+\infty[$, $h'(x)=g'(x)-1<0$ car $g'(x)\in\left]0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$\Rightarrow h$ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $h([1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),h(1)\right[=\left]-\infty,\sqrt{2}\right]$

En effet $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}-x=-\infty$ et $h(1)=g(1)-1=\sqrt{2}$

Or $0\in\left]-\infty,\sqrt{2}\right]$ donc l'équation $h(x)=0$ admet une seule solution α dans $[1,+\infty[$.

Et puisque h est continue sur $[2,3]$ et $h(2)\times h(3)=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}-1\right)\times\left(\dfrac{6}{\sqrt{10}}-2\right)<0$

donc $\alpha\in]2,3[$.

4) a) Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n ; $u_n\geq1$

Initialisation: Pour $n=0$, $u_0\geq1$ vraie

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $u_n\geq1$ et montrons que $u_{n+1}\geq1$.

La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $u_n\geq1\Rightarrow g(u_n)\geq g(1)\Rightarrow u_{n+1}\geq1+\sqrt{2}\geq1$.

b) g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall x\in[1;+\infty[$, $|g'(x)|\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc d'après le théorème des accroissements finis : pour tous réels a et b de $[1,+\infty[$, $|g(a)-g(b)|\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}|a-b|$

Prenons $a=u_n\in[1;+\infty[$ et $b=\alpha\in[1;+\infty[$ on obtient $|g(u_n)-g(\alpha)|\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\alpha|$

ou encore $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n-\alpha|$.

c) Il suffit de montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n,

$|u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n|u_0-\alpha|\\[2ex]\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n|u_0-\alpha|=0\quad\text{car }\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in]-1;1[\end{cases}\Rightarrow(u_n)\text{ est convergente et }\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$$

Exercice n°3

1) a) $z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-a)+a$ (résultat du cours)

$z_{B'}=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(b-a+i)+a=\dfrac{1}{2}\left(b-a-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}(b-a)\right)\right)+a$

$Donc\ z_{B'} = \frac{1}{2}\left(b + a - \sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\,(b - a)\right)\right)$

b) $B' \in (O, \vec{j}) \Leftrightarrow Re(z_{B'}) = 0 \Leftrightarrow b + a - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow b + a = \sqrt{3}$.

c) $b + a = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = \sqrt{3} - a$ donc

$$z_{B'} = \frac{1}{2} i\left(1 + \sqrt{3}\,(b - a)\right) = \frac{1}{2} i\left(1 + \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 2a\right)\right) = \frac{1}{2} i\left(1 + 3 - 2\sqrt{3}a\right) = i\left(2 - \sqrt{3}a\right)$$

2) $a = \sqrt{3}$ et $b = 0 \Rightarrow A(\sqrt{3})$ et $B(i)$

a) $AB = |b - a| = \left|i - \sqrt{3}\right| = 2$; $AC = |c - a| = \left|-i - \sqrt{3}\right| = 2$; $BC = |c - b| = |-i - i| = 2$

$AB = AC = BC \Rightarrow$ le triangle ABC est équilatéral.

b) $$\frac{d - a}{c - a} = \frac{2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{-i - \sqrt{3}} = \frac{2(-1 + i\sqrt{3})}{\sqrt{3} + i} = 2\,\frac{\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - i\right)}{2} = 4i$$

$$\frac{d - a}{c - a} = \frac{Aff\left(\overrightarrow{AD}\right)}{Aff\left(\overrightarrow{AC}\right)} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \text{le triangle } ACD \text{ est rectangle en } A.$$

c) $$E = r(D) \Leftrightarrow z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_D - \sqrt{3}\right) + \sqrt{3} = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(2 - 2i\sqrt{3}\right) + \sqrt{3} = 4 + \sqrt{3}$$

Donc $E(4 + \sqrt{3})$.

d) $F = t_{\overrightarrow{AC}}(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow z_F = c - a + d = -i - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$

Donc $z_F = 2 - i(1 + 2\sqrt{3})$.

e) $$BE = \left|4 + \sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(4 + \sqrt{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{20 + 8\sqrt{3}}$$

$$BF = \left|2 - i(1 + 2\sqrt{3}) - i\right| = \left|2 - i(2 + 2\sqrt{3})\right| = \sqrt{2^2 + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{20 + 8\sqrt{3}}$$

$$EF = \left|2 - i(1 + 2\sqrt{3}) - 4 - \sqrt{3}\right| = \sqrt{\left(-2 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(1 + 2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3} + 13 + 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{20 + 8\sqrt{3}}$$

Donc, d'après ce qui précède $BE = BF = EF \Rightarrow BEF$ est équilatéral.

Exercice n°4

1) a) On a $AI_1 = AI_2$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AI_1}, \overrightarrow{AI_2}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc $r(I_1) = I_2$

$r(\mathscr{C}_1)$ est le cercle de centre $r(I_1) = I_2$ et de même rayon or ABC est isocèle en A donc $AB = AC$ alors les deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont isométriques d'où $r(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$.

b) $$\left(\widehat{\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'M'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'A}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'M'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM'}}\right)\ [\pi]$$

Or $r(B) = C$ et $r(M) = M'$

et r conserve les mesures des angles orientés donc

$$\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CM'},\overrightarrow{CA}\right)$$

$$\equiv-\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM'}\right)[2\pi]$$

$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'M'}\right)\equiv 0\quad[\pi]$$

Ce qui prouve que les points A', M et M' sont alignés.

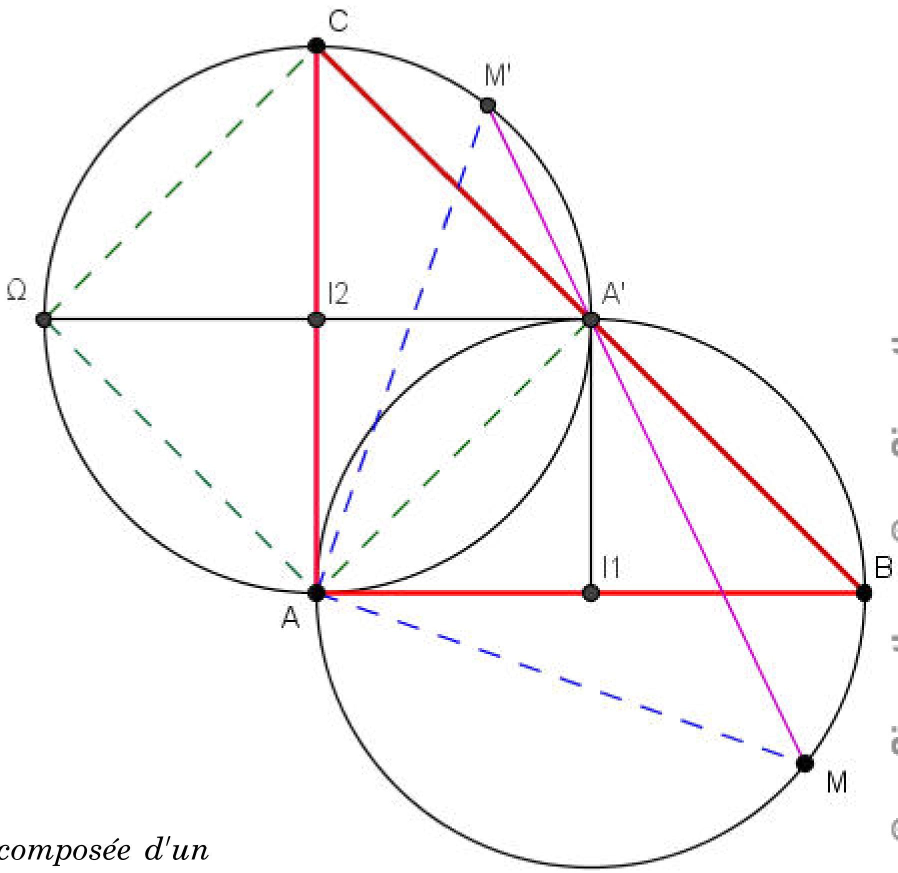
2) ror' est la composée de deux rotations dont la somme des angles est nul donc c'est une translation.

En plus on a :

$(ror')(B)=r(A)=A$

car $AA'B$ est isocèle en A'

Alors ror' est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.



3)

$Sor(A)=S(A)=A$

et $Sor(B)=S(C)=B$

Sor est un antidéplacement (composée d'un Déplacement et d'un antidéplacement) qui fixe les deux points distincts A et B donc Sor est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

4) a) $r_1=rot$ *est la composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul* $\frac{\pi}{2}$ *donc c'est une rotation de même angle.*

En plus $\overrightarrow{\Omega A'}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow t(\Omega)=A'$ *et* $\begin{cases}AA'=A\Omega\\ \left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{A\Omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\end{cases}\Rightarrow r(A')=\Omega$

D'où $r_1(\Omega)=\Omega$ *et* $\boxed{r_1 \text{ est la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}}$.

De la même façon on montre que $\boxed{r_2 \text{ est la rotation de centre } A' \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}}$.

b) $r_2or_1^{-1}(C)=r_2(A)=B$

r_1^{-1} *est la rotation de centre* Ω *et d'angle* $-\frac{\pi}{2}$.

$r_2or_1^{-1}$ *est la composée de deux rotations dont la somme des angles est nul donc c'est une translation. Et puisque* $r_2or_1^{-1}(C)=B$ *donc* $\overrightarrow{CB}$ *est le vecteur de cette translation.*

$r_2or_1^{-1}(M_1)=r_2(M)=M_2\Rightarrow\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{M_1C}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM_2}=\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{CM_1}=\overrightarrow{BM_2}$.