Durée de l'épreuve : 2H

Devoir de contrôle n°1

Classes : 4M 1+2

Prof: Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

Répondre par vrai ou faux.

1) Si z est un nombre complexe imaginaire alors z^2 est aussi imaginaire.

2) L'application du plan complexe dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = iz + 1 + i$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe i.

3) Le produit d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

4) Une isométrie qui laisse globalement invariant un triangle, fixe son centre de gravité.

5) Si une homothétie est une isométrie alors son rapport est égale à 1.

Exercice n°2

1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 3x - 2\cos x$.

Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une seule solution α et que $0,56 < \alpha < 0,57$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x-2}{3x - 2\cos x}$.

a) Montrer que pour tout réel $x > \frac{2}{3}$ on a: $\dfrac{3x-2}{3x+2} \leq f(x) \leq 1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dont la courbe représentative $(\mathscr{C})$ est donnée en annexe (voir page 3) telle que les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$ sont deux asymptotes à cette courbe.

Déterminer graphiquement : $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} g(x)$.

4) On pose $h = gof$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction h.

b) Déterminer les limites éventuelles suivantes :

$$\lim_{x\to\alpha^+} h(x)\ ;\ \lim_{x\to\alpha^-} h(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} h(x)\ ;\ \lim_{x\to 1000\pi} h(x).$$

Exercice n°3

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation (E_θ) : $z^2-2(i+\cos\theta)z+1+2ie^{-i\theta}=0$.

1) a) Vérifier que $-8+4\cos^2\theta-8\sin\theta=\left(2i\left(1+\sin\theta\right)\right)^2$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

2) Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$z_A=i$, $z_B=e^{-i\theta}$ et $z_C=2i+e^{i\theta}$.

a) Vérifier que $z_B-z_A=\overline{z_C-z_A}$. En déduire que $AB=AC$.

b) Montrer que $z_C-z_A=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.

c) En déduire la valeur de θ pour laquelle le triangle ABC est équilatéral.

Exercice n°4

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a: $1<u_n<3$.

(Indication: on pourra écrire $u_{n+1}=2\sqrt{u_n+1}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$.)

b) Montrer que (u_n) est croissante

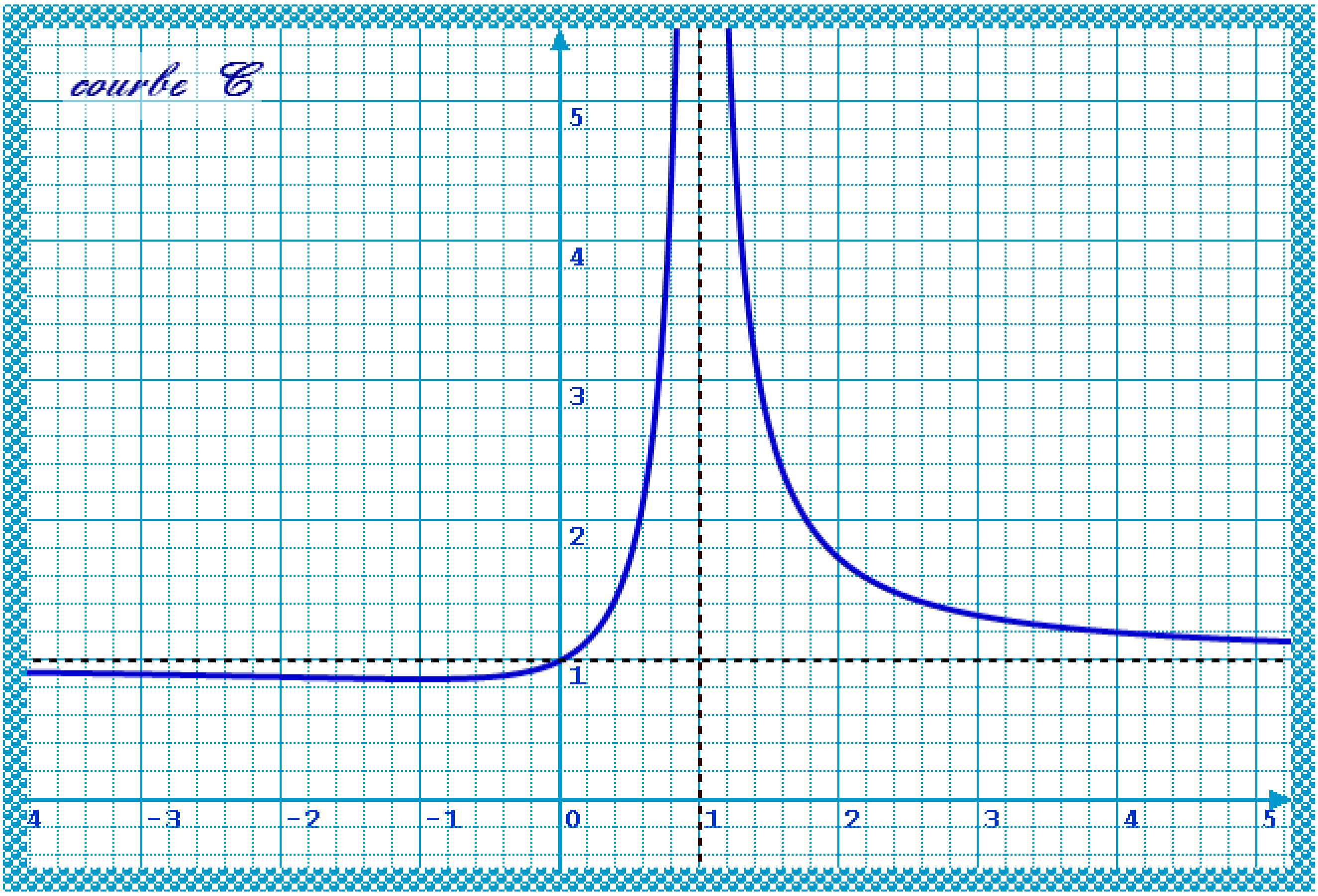
c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a: $9-{u_{n+1}}^2\leq 4(3-u_n)$ et que $3-u_{n+1}\leq\frac{4}{5}(3-u_n)$.

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $3-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$ et retrouver la limite de la suite (u_n).

3) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par: $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{u_k-4}{3-u_k}\right)$.

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a: $S_n\leq -n-1-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{4}\right)^k$ et déduire la limite de (S_n).


courbe $\mathscr{C}$
5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Correction du devoir de contrôle n°1 4M

Exercice n°1

1) **Faux**

z imaginaire $\Leftrightarrow z = iy$ avec $y \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 = -y^2 \in \mathbb{R}_-$

2) **Vrai**

$z' = az + b$ avec $a = i$ et $b = 1+i$

Puisque $|a| = 1$ et $a \neq 1$ donc l'application f est une rotation d'angle $\arg a \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$.

3) **Faux**

Prenons $u_n = (-1)^n$ (suite divergente) et $v_n = \frac{1}{n}$ (suite convergente). $u_n v_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$|u_n v_n| = \frac{1}{n}$ donc $(u_n v_n)$ converge vers 0.

4) **Vrai**.

Soit f une isométrie et ABC un triangle, de centre de gravité G, globalement invariant par f alors $f(\{A,B,C\}) = \{A,B,C\}$.

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{f(G)f(A)} + \overrightarrow{f(G)f(B)} + \overrightarrow{f(G)f(C)} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{f(G)A} + \overrightarrow{f(G)B} + \overrightarrow{f(G)C} = \vec{0}$

D'où $f(G) = G$ d'après l'unicité du centre de gravité.

5) **Faux**.

Soit h une homothétie de rapport k

Pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N', $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Si h est une isométrie alors $M'N' = MN$ donc $|k| = 1$ d'où $k = 1$ ou $k = -1$.

Exercice n°2

1) **Existence et encadrement**

la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 3x - 2\cos x$, est continue sur $\mathbb{R}$

Et en plus $u(0,56) = -0,01451$ et $u(0,57) = 0,026198 \Rightarrow u(0,56) \times u(0,57) < 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x)=0$ *admet au moins une solution* α *dans l'intervalle* $]0,56;0,57[$.

Unicité

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et pour tout réel x on a:* $u'(x)=3+2\sin x$

Et puisque $\sin x>-1$ *donc* $u'(x)>3-2>0$ *ce qui permet de dire que la fonction u est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et par suite* α *est la seule solution réelle de l'équation* $u(x)=0$.

2) a) $-1\le -\cos x\le 1 \Leftrightarrow -2\le -2\cos x\le 2 \Leftrightarrow 3x-2\le 3x-2\cos x\le 3x+2$

Or $x>\dfrac{2}{3} \Rightarrow 0<3x-2\le 3x-2\cos x\le 3x+2 \Rightarrow \dfrac{1}{3x+2}\le\dfrac{1}{3x-2\cos x}\le\dfrac{1}{3x-2}$

Donc $\dfrac{3x-2}{3x+2}\le\dfrac{3x-2}{3x-2\cos x}\le 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{3x-2}{3x+2}\le f(x)\le 1$.

b) $\begin{cases}\dfrac{3x-2}{3x+2}\le f(x)\le 1 \text{ pour } x>\dfrac{2}{3}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{3x}}{\cancel{3x}}=1\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1.$

3) $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to1}g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$ *donc* $\lim\limits_{|x|\to+\infty}g(x)=1$.

4) a) h(x) existe ssi f(x) existe et g(f(x)) existe $\Leftrightarrow x\ne\alpha$ *et* $f(x)\ne1$

Or $f(x)=1\Leftrightarrow 3x-2=3x-2\cos x\Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Donc le domaine de définition de h= $\mathbb{R}\setminus\{\alpha,\ 2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\}$.

b)

- $\lim\limits_{x\to\alpha^+}u(x)=u(\alpha)=0$ *et* $x>\alpha\Rightarrow u(x)>u(\alpha)=0$.

  En plus $\alpha\in]0,56;0,57[\Rightarrow 3\alpha-2<0$ *donc* $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=-\infty$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha^+}h(x)=1$

- $\lim\limits_{x\to\alpha^-}u(x)=u(\alpha)=0$ *et* $x<\alpha\Rightarrow u(x)<u(\alpha)=0$.

  En plus $\alpha\in]0,56;0,57[\Rightarrow 3\alpha-2<0$ *donc* $\lim\limits_{x\to\alpha^-}f(x)=+\infty$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha^-} h(x) = 1$$

Il n'existe aucun un voisinage de $+\infty$(un intervalle de la forme $[a,+\infty[$) sur lequel la fonction h est définie donc h n'admet pas de limite en$+\infty$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1000\pi} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1000\pi} h(x) = +\infty$$

Exercice n°3

1) a)

$$-8 + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta = -8 + 4(1-\sin^2\theta) - 8\sin\theta = -4\sin^2\theta - 8\sin\theta - 4$$

$$= -4\left(\sin^2\theta + 2\sin\theta + 1\right) = (2i)^2\left(1+\sin\theta\right)^2 = \left(2i\left(1+\sin\theta\right)\right)^2$$

b) $\Delta = 4\left(i+\cos\theta\right)^2 - 4\left(1+2ie^{-i\theta}\right) = 4\left(-1+\cos^2\theta + 2i\cos\theta - 1 - 2i\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)\right)$

$$= -8 + 4\cos^2\theta + 8i\cos\theta - 8i\cos\theta - 8\sin\theta = -8 + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta$$

$$= \left(2i\left(1+\sin\theta\right)\right)^2 \qquad \text{(d'après a))}$$

Donc les solutions de l'équation $\left(E_\theta\right)$ sont :

$$z' = \frac{2\left(i+\cos\theta\right) - 2i\left(1+\sin\theta\right)}{2} = \frac{2i + 2\cos\theta - 2i - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

$$z'' = \frac{2\left(i+\cos\theta\right) + 2i\left(1+\sin\theta\right)}{2} = 2i + \cos\theta + i\sin\theta = 2i + e^{i\theta}$$

2) a) $\overline{z_C - z_A} = \overline{2i + e^{i\theta} - i} = \overline{i + e^{i\theta}} = -i + e^{-i\theta} = z_B - z_A$.

$AB = \left|z_B - z_A\right| = \left|\overline{z_C - z_A}\right| = \left|z_C - z_A\right| = AC$.

b) $z_C - z_A = i + e^{i\theta} = i\left(1 - ie^{i\theta}\right) = i\left(1 + e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}\right) = ie^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\right)$

Or $e^{-i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ (formule d'Euler)

Donc $z_C - z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$.

c) ABC équilatéral si et seulement si $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$$\begin{cases} arg\left(z_C - z_A\right) - arg\left(z_B - z_A\right) \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\ ou \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (S) \\ arg\left(z_C - z_A\right) - arg\left(z_B - z_A\right) \equiv -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$Or\ -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4} < 0 \Rightarrow cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$

$Donc\ arg\left(z_C - z_A\right) \equiv \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi] \ \ et\ \ arg\left(z_B - z_A\right) \equiv -arg\left(z_C - z_A\right) \equiv -\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\ \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} \equiv -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta + \dfrac{\pi}{2} \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\ \theta + \dfrac{\pi}{2} \equiv -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv -\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi] \\ \theta \equiv -\dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$Ce\ qui\ donne\ \ \theta = -\dfrac{\pi}{6} \quad car\ \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice n°4

1) a) Montrons ce résultat par récurrence

Pour $n = 0$, $u_0 = 2 \in]1,3[$ vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \in]1,3[$ et montrons que $u_{n+1} \in]1,3[$.

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n + 1}} = \frac{2(u_n + 1) - 2}{\sqrt{u_n + 1}} = 2\sqrt{u_n + 1} - \frac{2}{\sqrt{u_n + 1}}.$$

$$1 < u_n < 3 \Leftrightarrow 2 < u_n + 1 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{u_n + 1} < 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 2\sqrt{u_n + 1} < 4 \qquad (1)$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{u_n + 1} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{u_n + 1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < \frac{-2}{\sqrt{u_n + 1}} < -1 \qquad (2)$$

(1)+(2) $\Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2\sqrt{u_n + 1} - \dfrac{2}{\sqrt{u_n + 1}} < 3$ **donc** $1 < u_{n+1} < 3$.

b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n + 1}} - u_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n + 1}}\left(2 - \sqrt{u_n + 1}\right) = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n + 1}} \dfrac{3 - u_n}{2 + \sqrt{u_n + 1}} > 0$.

(car $u_n \in]1,3[$) donc (u_n) est croissante.

c) (u_n) est croissante et majorée (par 3) donc elle est convergente.

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} \\ (u_n) \text{ converge vers une limite } l \in [1,3] \Rightarrow f(l) = l \\ f \text{ continue sur } [1,3] \subset]-1,+\infty[\end{cases}$$

$$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{2l}{\sqrt{l+1}} = l \Leftrightarrow 2l = l\sqrt{l+1} \Leftrightarrow 4l^2 = l^3 + l^2 \Leftrightarrow 3l^2 - l^3 = 0 \Leftrightarrow l^2(3-l) = 0$$

Donc $l = 0 \notin [1,3]$ *ou* $l = 3$ *d'où* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

2) a) $9 - u_{n+1}{}^2 = 9 - \dfrac{4u_n{}^2}{u_n+1} = \dfrac{9u_n + 9 - 4u_n{}^2}{u_n+1} = \dfrac{(3-u_n)(3+4u_n)}{u_n+1}$

$$\frac{4u_n+3}{u_n+1} = \frac{4(u_n+1)-1}{u_n+1} = 4 - \frac{1}{u_n+1} \leq 4 \Rightarrow \frac{(3-u_n)(4u_n+3)}{u_n+1} \leq 4(3-u_n).$$

Alors $(3-u_{n+1})(3+u_{n+1}) \leq 4(3-u_n) \Rightarrow 3 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{3+u_{n+1}}(3-u_n)$.

La suite (u_n) *est croissante donc*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0 = 2 \Rightarrow u_{n+1} \geq 2 \Rightarrow 3 + u_{n+1} \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{3+u_{n+1}} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4}{3+u_{n+1}} \leq \frac{4}{5}$$

Or $3 - u_n > 0$ *donc* $\dfrac{4}{3+u_{n+1}}(3-u_n) \leq \dfrac{4}{5}(3-u_n)$ *ou encore* $3 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(3-u_n)$

b) *Pour* $n = 0$, $3 - u_0 = 1 \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^0$ *vrai*

Soit $n \in \mathbb{N}$, *supposons que* $3 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ *et montrons que* $3 - u_{n+1} \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$.

$$3 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(3-u_n) \leq \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ donc } 3 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$

$$\begin{cases} 0 \leq 3 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0 \quad \text{car } \dfrac{4}{5} \in]-1,1[\end{cases} \Rightarrow \text{ La suite } (u_n) \text{ converge vers } 3.$$

3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{u_k - 4}{3-u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{u_k - 3 - 1}{3-u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(-1 - \frac{1}{3-u_k}\right)$

$Or\ \ 3-u_k \le \left(\frac{4}{5}\right)^k \Rightarrow \frac{1}{3-u_k} \ge \left(\frac{5}{4}\right)^k \Rightarrow \frac{-1}{3-u_k} \le -\left(\frac{5}{4}\right)^k.$

Donc $\qquad S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(-1-\frac{1}{3-u_k}\right) = -n-1+\sum_{k=0}^{n}\frac{-1}{3-u_k} \le -n-1-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{4}\right)^k$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{4}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{4}} = -4\left(1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right)\ donc\ \ S_n \le -n-1+4\left(1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$\begin{cases} S_n \le -n-1+4\left(1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right) \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n-1+4\left(1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right)\right) = -\infty\ car\ \ \frac{5}{4} > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$$