| Epreuve | Devoir de Contrôle n°2 | Professeur |
|---|---|---|
| Mathématiques | Classe : 4ème Math | Dhaouadi Nejib |
| Durée : 2H | Février 2015 | |

## Exercice 1

*Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que*

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *et on désigne par* $I$ *le milieu du segment* $[AB]$.

1) a) *Montrer qu'il existe une similitude directe* $f$ *qui transforme* $A$ *en* $I$ *et* $B$ *en* $O$.

b) *Déterminer l'angle* $\theta$ *et le rapport* $k$ *de cette similitude et construire son centre* $\Omega$.

c) *Montrer que* $f(D) = A$ *et déduire que les points* $\Omega$, $I$ *et* $D$ *sont alignés.*

2) *On pose* $g = f \circ S_{(BD)}$ *et on note* $w$ *le point tel que* $\overrightarrow{Dw} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$.

a) *Montrer que* $g$ *est une similitude indirecte et déterminer son rapport.*

b) *Déterminer* $g(B)$, $g(C)$ *et* $g(D)$.

*En déduire que* $w$ *est le centre de la similitude indirecte* $g$.

c) *Montrer que l'axe* $\Delta$ *de* $g$ *est la perpendiculaire à* $(AD)$ *en* $w$.

d) $\Delta$ *coupe* $(ID)$ *en* $J$. *Montrer que les points* $\Omega$, $w$, $A$ *et* $J$ *appartiennent à un même cercle que l'on précisera.*

## Exercice 2

1) *On pose* $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$ *et* $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$.

*Calculer* $A + B$, $A - B$ *et puis* $A$ *et* $B$.

2) *Pour tout entier naturel non nul* $n$, *on pose* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

a) *Calculer* $I_1$ *et* $I_2$.

b) *A l'aide d'une integration par parties, montrer que pour tout entier naturel* $n \geq 1$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n. \quad (\textit{on pourra remarquer que } \cos^{n+2} x = \cos x \cdot \cos^{n+1} x)$$

c) *En déduire* $I_3$ *et* $I_4$.

## Exercice 3

$\boxed{\textit{Partie I}}$ *On considère la fonction* $F$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}$

*et la fonction* $G$ *définie sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *par* $G(x) = F\left(\frac{1 - \tan x}{2}\right)$.

1) Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée $F'$.

2) Vérifier que $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F(1)$.

3) Calculer $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

4) a) Justifier que $G$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$.

b) En déduire que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = -x + F(1) - \frac{\pi}{4}$.

5) Montrer que $\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{\pi}{2}$.

Parie II

1) a) Etudier les variations de la fonction $g$ définie sur $[0,1]$ par : $g(t) = t(1-t)$.

b) En déduire que pour tout réel $t \in [0,1]$, $0 \le g(t) \le \frac{1}{4}$.

2) On définie la suite $(I_n)$ sur $\mathbb{N}$ par $I_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt$.

a) Calculer $I_1$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le I_n \le \frac{1}{4^n}$.

c) En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente et préciser sa limite.

– – – – – – – – – (Complément à traiter pendant la correction du devoir) – – – – – – – – – –

3) On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k I_k$.

a) Démontrer que pour tout réel $t \in [0,1]$ et pour tout entier naturel non nul $n$

$$2t(1-t) + 2^2t^2(1-t)^2 + \ldots + 2^n t^n (1-t)^n = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul $n$, $\left|u_n + 1 - \frac{\pi}{2}\right| \le \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

c) Démontrer alors que la suite $(u_n)$ est convergente et donner sa limite.

# Correction du devoir de Contrôle n°2 4èmeMath (2014-2015)

## Exercice 1

1) a) $AB \neq 0$ et $IO \neq 0$ donc il existe et unique une similitude $f$ qui transforme $A$ en $I$ et $B$ en $O$. On note $k$ et $\theta$ respectivement le rapport et l'angle de $f$

b) On a $f(A) = I$ et $f(B) = O \Rightarrow \boxed{k = \frac{IO}{AB} = \frac{IO}{2IO} = \frac{1}{2}}$

et $\boxed{\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$ (Pour la construction du centre voir page 4)

c) $f\left((AD)\right)$ est la perpendiculaire à $(AD)$ passant par $f(A) = I \Rightarrow f\left((AD)\right) = (AB)$.

$f\left((BD)\right)$ est la perpendiculaire à $(BD)$ passant par $f(B) = O \Rightarrow f\left((BD)\right) = (AC)$.

$\{D\} = (AD) \cap (BD) \Rightarrow \{f(D)\} = f(AD) \cap f(BD) = (AB) \cap (AC) = \{A\} \Rightarrow \boxed{f(D) = A}$

2) a) $g$ est la composé de la similitude directe $f$ de rapport $\frac{1}{2}$ et la similitude indirecte $S_{(BD)}$ de rapport 1 donc c'est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

b) $g(B) = f\left(S_{(BD)}(B)\right) = f(B) = O$ , $g(C) = f\left(S_{(BD)}(C)\right) = f(A) = I$.

$g(D) = f\left(S_{(BD)}(D)\right) = f(D) = A$.

$\overrightarrow{Dw} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{g(D)g(w)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{g(C)g(B)} \Rightarrow \overrightarrow{Ag(w)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{Dg(w)} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{Dg(w)} = \overrightarrow{DA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{Dw}$

Alors $\boxed{g(w) = w}$.

c) $g(D) = A \Rightarrow$ l'axe $\Delta$ de $g$ porte la bissectrice interieure de l'angle $\widehat{DwA}$

Or $w \in [AD]$ $\left(\text{car } \overrightarrow{Dw} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}\right)$ Donc $\Delta$ est la perpendiculaire à $(AD)$ en $w$.

d) $f(A) = I \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega J}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ car $I, J, \Omega$ alignés.

Donc $\Omega$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AJ]$.

On a aussi $(\widehat{\overrightarrow{wA}, \overrightarrow{wJ}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ car $J \in \Delta$ la perpendiculaire à $(AD)$ en $w$

Donc $w$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AJ]$.

D'où les quatre points $A$, $J$, $w$ et $\Omega$ sont situés sur le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AJ]$.

## Exercice 2

1) $A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$

$A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$

$$On\ pose \begin{cases} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos 2x \Leftarrow v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\ dx = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\ dx = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[-1-1\right] = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} A + B = \frac{\pi^2}{8} \\ A - B = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = \frac{\pi^2 - 4}{8} \\ 2B = \frac{\pi^2 + 4}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} A = \frac{\pi^2 - 4}{16} \\ B = \frac{\pi^2 + 4}{16} \end{cases}}$$

2) a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

b) $On\ pose \begin{cases} u(x) = \cos^{n+1} x \Rightarrow u'(x) = -(n+1)\sin x \cos^n x \\ v'(x) = \cos x \Leftarrow v(x) = \sin x \end{cases}$

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^{n+1} x\ dx = \left[\sin x \cos^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^n x\ dx$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 x\right)\cos^n x\ dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\ dx$$

$$= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

Donc $I_{n+2}(1+n+1) = (n+1)I_n \Rightarrow \boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n}.$

c) Pour $n = 1$ on obtient $I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}\times 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{2}{3}}.$

Pour $n = 2$ on obtient $I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4}\times\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{16} \Rightarrow \boxed{I_4 = \frac{3\pi}{16}}.$

## Exercice 3

1) La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}$ est une fonction rationnelle donc elle est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}$. $\left(2t^2 - 2t + 1 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \neq 0 \text{ pour tout réel } t\right)$.

Donc $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$, $F'(x) = \varphi(x)$.

2) $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{1 - \tan\left(-\pi/4\right)}{2}\right) = F\left(\frac{1+1}{2}\right) = F(1).$

3) $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{1 - \tan\left(\pi/4\right)}{2}\right) = F\left(\frac{1-1}{2}\right) = F(0) = 0.$

4) a) la fonction $u : x \mapsto \frac{1 - \tan x}{2}$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc $G = F o u$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $G'(x) = u'(x)F'(u(x)) = u'(x)\varphi(u(x))$

$$G'(x) = \frac{-(1+\tan^2 x)}{2}\,\frac{1}{2\left(\frac{1-\tan x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1-\tan x}{2}\right)+1}$$

$$= \frac{-(1+\tan^2 x)}{2}\,\frac{2}{1-2\tan x+\tan^2 x - 2 + 2\tan x + 2} = -1.$$

b) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $G'(x) = -1 \Rightarrow$ il existe une constante réelle $\lambda$ telle que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = -x+\lambda$.

Pour $x = -\frac{\pi}{4}$ on a $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}+\lambda = F(1) \Rightarrow \lambda = F(1)-\frac{\pi}{4}$.

Donc pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = -x + F(1) - \frac{\pi}{4}$.

5) $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + F(1) - \frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow F(1) = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1} = \frac{\pi}{2}}$.

$\boxed{\text{Partie II}}$ 1) a) $g$ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$, $g'(t) = 1-2t$

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ | $0$ |

b) D'après le tableau de variation de $g$, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \le g(t) \le \frac{1}{4}$.

2) a) $I_1 = \int_0^1 (t-t^2)dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{1}{6}}$.

b) Soit $t \in [0,1]$, $0 \le t(1-t) \le \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \le t^n(1-t)^n \le \frac{1}{4^n}$

Donc $0 \le \int_0^1 t^n(1-t)^n dt \le \int_0^1 \frac{1}{4^n}dt$ ce qui donne $0 \le I_n \le \frac{1}{4^n}$.

c) $\left\{\begin{array}{l} 0 \le I_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{1}{4} \in \left]-1,1\right[. \end{array}\right. \Rightarrow$ La suite $(I_n)$ est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3) a) $2t(1-t)+2^2t^2(1-t)^2+\ldots+2^nt^n(1-t)^n=(2t(1-t))^1+(2t(1-t))^2+\ldots+(2t(1-t))^n$

$$=2t(1-t)\frac{1-(2t(1-t))^n}{1-2t(1-t)}=\frac{2t(1-t)}{2t^2-2t+1}-\frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}$$

$$=\frac{1-(2t^2-2t+1)}{2t^2-2t+1}-\frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}=\frac{1}{2t^2-2t+1}-1-\frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}.$$

b) $$u_n=\sum_{k=1}^{n}2^kI_k=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 2^kt^k(1-t)^k dt=\int_0^1\frac{dt}{2t^2-2t+1}-1-\int_0^1\frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}dt$$

Donc $$\left|u_n+1-\frac{\pi}{2}\right|=\left|\frac{\pi}{2}-1-\int_0^1\frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}dt+1-\frac{\pi}{2}\right|=\left|\int_0^1\frac{2^{n+1}\left(g(t)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}\right|$$

$$\Rightarrow\left|u_n+1-\frac{\pi}{2}\right|\le 2^{n+1}\int_0^1\frac{\frac{1}{2^{2(n+1)}}}{2t^2-2t+1}dt\quad \text{car}\quad 0\le\left(g(t)\right)^{n+1}\le\frac{1}{4^{n+1}}=\frac{1}{2^{2(n+1)}}.$$

$$\Rightarrow\left|u_n+1-\frac{\pi}{2}\right|\le 2^{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}}\int_0^1\frac{1}{2t^2-2t+1}dt=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2^{n+2}}\le\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

c) $$\left\{\begin{array}{l}\left|u_n-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\right|\le\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\ \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=0\ \text{car}\ \dfrac{1}{2}\in\left]-1,1\right[\end{array}\right.\ \Bigg|\ \begin{array}{l}\Rightarrow \text{La suite } \left(u_n-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\right) \text{ converge vers } 0\\ \text{Donc la suite } (u_n) \text{ converge vers } \dfrac{\pi}{2}-1.\end{array}$$

---

*Construction du centre Ω de la similitude directe f (exercice n°1)*