Exercice 01: (3 points)

Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \left(\cos \frac{\pi}{5}\right)^n$ converge vers 1.
- 2) Si (u_n) est une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $-1 \leq u_n \leq 1$ alors (u_n) est convergente
- 3) Soit f une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1[$ et telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{alors}$$

L'équation $f(x) = 2011$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0;1[$

- 4) Soient A et B deux évènements tels que $p(A/B) = \frac{1}{4}$, $p(A/\bar{B}) = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$ alors

$$p(A) = \frac{7}{24}$$

Exercice 02: (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \\ x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout $x \in]0;1[$ on a $\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{-\sqrt{x}}{x-1}$
- b) Montrer alors que f est continue en 0.
- c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) On pose $u(x) = \frac{\pi(x-1)}{x}$ et $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$
 - a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, $f(x) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{x}}\right) \times g \circ u(x)$
 - b) En déduire que f admet un prolongement par continuité F en 1.
 - c) En utilisant ce prolongement, Montrer que l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 3\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ admet dans l'intervalle $]1;2[$ une solution α

Exercice 03: (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne $a = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$

1) a) Montrer que $a = \sqrt{2} \times e^{i\frac{7\pi}{12}}$

b) Ecrire a sous forme algébrique et déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

2) Soient les points A, B et C d'affixes respectives a^2 , a^4 et $a^2(1 + a^2)$

a) Montrer que OACB est un parallélogramme

b) Construire les points A, B et C.

3) Montrer que $(1 + i\sqrt{3})^{12} + 64(1 - i)^{12} = 0$

Exercice 04: (5 points)

Dans une classe de 30 élèves, 14 sont des filles. Par ailleurs, 8 filles et 4 garçons sont internes. Les autres élèves sont externes.

On choisit un élève au hasard dans cette classe.

On considère les événements suivants :

A : " l'élève choisi est interne " ; B : " l'élève choisi est un garçon ".

1) Calculer la probabilité de l'événement A puis de l'événement B.

2) a) Calculer la probabilité que l'élève choisi soit un garçon, sachant qu'il est interne.

b) Déterminer la probabilité des l'événement $A \cap B$ et $A \cup B$

3) L'élève choisi est un garçon, quelle est la probabilité pour qu'il soit interne?