Durée de l'épreuve : 2H

Devoir de contrôle n°3

Classe : 3ST

Prof: Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

Soit la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et pour tout entier naturel n,* $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1) *Calculer les termes* u_1 *et* u_2.

2) *Montrer que la suite* (u_n) *est ni arithmétique ni géométrique.*

3) *Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n on a:* $u_n > 0$

4) *On pose* $v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$.

a. *Calculer* v_{n+1} *en fonction de* v_n. *En déduire que* (v_n) *est une suite arithmétique.*

b. *Exprimer* v_n *en fonction de n. En déduire* u_n *en fonction de n.*

c. *Déterminer alors la limite de la suite* (u_n).

Exercice n°2

On considère la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par:* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \end{cases}$.

1) *Etudier la monotonie de la suite* (u_n).

2) *Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,* $u_n > n^2$.

3) *Montrer que pour tout entier naturel n,* $u_n = n^2 + n + 1$

Exercice n°3

1) *Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants:*

$$a = \frac{1}{5+3i} \qquad b = \frac{3+2i}{3-2i} \qquad c = \frac{1+18i}{3+4i} + \frac{7-26i}{3-4i}$$

2) *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants:

1) $|z|^2 = 2$

2) $|z-(1+i)| = 5$

3) $|z-i| = |z+1|$

Exercice n°4

Soient les deux nombres complexes $u = 1 + i\sqrt{3}$ *et* $v = 1 - i$.

1) Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes u et v.

2) On pose $w = \dfrac{u}{v}$.

a) Donner les formes algébrique et trigonométrique de w.

b) En déduire le cosinus et le sinus de $\dfrac{7\pi}{12}$.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On donne les points A et B d'affixes respectives u et v

Déterminer les coordonnées du point C pour que le quadrilatère OABC soit un parallélogramme.