Durée de l'épreuve : 2H

Devoir de contrôle n°3

Classe : 3STI

Prof: Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par:

$u_0 = a \quad (a > 0)$ *et pour tout entier naturel n,* $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{u_n + 1}$.

1) *Déterminer a pour que la suite (u_n) soit constante.*

2) *On suppose que $a \neq 2$ et on pose* $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

a) *Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison* $q = -\dfrac{1}{3}$.

b) *Exprimer v_n en fonction de a et n.*

c) *Exprimer u_n en fonction de v_n et puis u_n en fonction a et n.*

d) *Déterminer alors la limite de la suite (u_n).*

Exercice n°2

Démontrez par récurrence chacune des propositions suivantes:

1) *Pour tout entier naturel non nul n,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) *Pour tout entier naturel non nul n, on a :* $n! \geq 2^{n-1}$.

3) *Pour tout entier naturel n,* $5^{2n} - 2^n$ *est un multiple de 23.*

Exercice n°3

1) *Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants:*

$$a = \frac{1}{5+3i} \qquad b = \frac{3-2i}{2+3i} \qquad c = (4+3i)^3$$

2) *Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants:*

$$a = 1 + i\sqrt{3}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{3} - i}, \qquad c = \frac{(1-i)^5}{(1+i\sqrt{3})^4}, \qquad d = \frac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}}$$

Exercice n°4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit D l'ensemble des points M(z) tels que $|z-4i| = |z-(1+i)|$ (*)

1) En posant $z = x + iy$ *où x et y sont des réels, montrer que D est une droite dont on donnera une équation cartésienne.*

2) Soient A et B les points d'affixes respectives $4i$ *et* $1+i$

a) Interpréter géométriquement la relation (*) à l'aide des points A et B.

b) Retrouver alors l'équation de la droite D.