Durée de l'épreuve 2H	Devoir de contrôle n°2 Classe : 4M2	Professeur Dhaouadi Nejib

Exercice1

Soit ABCD un carré direct de centre O tel que $AB = 1$.

On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ *et* $[AD]$.

Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

On note Ω *le centre de cette similitude.*

1) *Déterminer le rapport et l'angle de S.*

2) a) *Déterminer les images, par S, des droites (BD) et (BC).*

b) *Déduire alors S(B).*

c) *Déterminer S(A) et S(O).*

3) a) *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de SoS.*

b) *Déterminer SoS(B) et SoS(D) et déduire une construction de* Ω.

4) *On muni le plan complexe du repère orthonormé direct* $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

a) *Déterminer l'expression complexe de S.*

b) *Déduire l'affixe de* Ω.

5) *Soit g la similitude indirecte qui transforme D en O et C en I.*

a) *Montrer que* $g = S_{(OI)} o S$ $S_{(OI)}$ *désigne la symétrie orthogonale d'axe (OI).*

b) *Déterminer g(B) et déduire l'axe de g.*

Exercice n°2

On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ *par :* $f(x) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *d'unité graphique 4 cm.*

Partie A

1) *Montrer que f est une fonction impaire. Que peut-on déduire pour la courbe (C)?*

2) a) *Justifier que f est dérivable sur* $]-1,1[$ *et vérifier que* $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

b) *Dresser le tableau de variation de f.*

3) a) *Donner une équation de la tangente* T *à la courbe* (C) *au point d'abscisse 0.*

b) *Etudier les variations de la fonction* g *définie sur* $]-1,1[$ *par* $g(x) = f(x) - x$.

c) *En déduire la position de la courbe* (C) *par rapport à la tangente* T.

4) *Tracer la tangente* T *et la courbe* (C).

Partie B

On se propose dans cette partie d'étudier la convergence de la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$

par : $u_n = \dfrac{1}{1\times 2^1} + \dfrac{1}{3\times 2^3} + ... + \dfrac{1}{(2n+1)\times 2^{2n+1}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(2k+1)\times 2^{2k+1}}$.

1) *Soit* n *un entier naturel non nul.*

a) *Montrer que pour tout réel* $t \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ *on a :* $\dfrac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + ... + t^{2n} + \dfrac{t^{2n+2}}{1-t^2}$

b) *En déduire que :* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = u_n + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,dt$.

2) a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout réel* $t \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ *on a :*

$$0 \le \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} \le \frac{4}{3}t^{2n+2}.$$

b) *En déduire que* $0 \le \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}dt \le \frac{4}{3(2n+3)}$

c) *Conclure.*

CORRECTION DU DEVOIR

Exercice n°I

1) S la similitude directe telle que $S(D)=0$ et $S(C)=I$

On note k le rapport de S et θ son angle.

$$k=\frac{OI}{DC}=\frac{\frac{1}{2}BC}{DC}=\frac{1}{2} \text{ car } BC=DC. \quad \theta\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{OI}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}$$

2) a) $\theta\equiv-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ donc l'image d'une droite, par S, est une droite qui lui est perpendiculaire.

$S((BD))$ est la perpendiculaire à (BD) passant par $S(D)=0$ donc $S((BD))=(AC)$.

$S((BC))$ est la perpendiculaire à (BC) passant par $S(C)=I$ donc $S((BC))=(AB)$.

b) $\{B\}=(BC)\cap(BD)\Rightarrow\{S(B)\}=S(BC)\cap S(BD)=(AC)\cap(AB)=\{A\}$

Donc $S(B)=A$.

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{S(C)S(A)}=\overrightarrow{S(C)S(B)}+\overrightarrow{S(C)S(D)}\Rightarrow\overrightarrow{IS(A)}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IJ}$$

Donc $S(A)=J$.

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{S(A)S(O)}=\frac{1}{2}\overrightarrow{S(A)S(C)}\Rightarrow\overrightarrow{JS(O)}=\frac{1}{2}\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{JE} \text{ où } E \text{ milieu de } [OA].$$

Donc $S(O)=E$.

3) a) SoS est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{4}$ et d'angle π

c-à-d l'homothétie h de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$.

b) $SoS(B)=S(S(B))=S(A)=J$ et $SoS(D)=S(S(D))=S(O)=E$.

Donc $h(B)=J$ et $h(D)=E\Rightarrow\{\Omega\}=(BJ)\cap(DE)$ (voir figure).

4) a) Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe tels que $S(M)=M'$

On sait que $z'=az+b$ où a et b sont des nombres complexes

$$\begin{cases}S(A)=J\\S(B)=A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_J=az_A+b\\z_A=az_B+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}i\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}i\\a=-b\end{cases} \text{ donc } z'=-\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}i.$$

b) $k = \frac{1}{2} \neq 1 \Rightarrow \Omega$ *est l'unique point invarint par S*

$S(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow z_\Omega = -\frac{1}{2} i z_\Omega + \frac{1}{2} i \Leftrightarrow 2z_\Omega = -iz_\Omega + i \Leftrightarrow z_\Omega(2+i) = i \Leftrightarrow z_\Omega = \frac{i}{2+i} = \frac{i(2-i)}{5}$

ce qui donne $z_\Omega = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} i$.

5) goS^{-1} *est la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte donc c'est une similitude indirecte.*

$goS^{-1}(O) = g(D) = O$ *et* $goS^{-1}(I) = g(C) = I$

goS^{-1} *est une similitude indirecte qui fixe les deux points distincts O et I donc c'est la symétrie orthogonale d'axe (OI) et on a* $goS^{-1} = S_{(OI)} \Rightarrow g = S_{(OI)} o S$

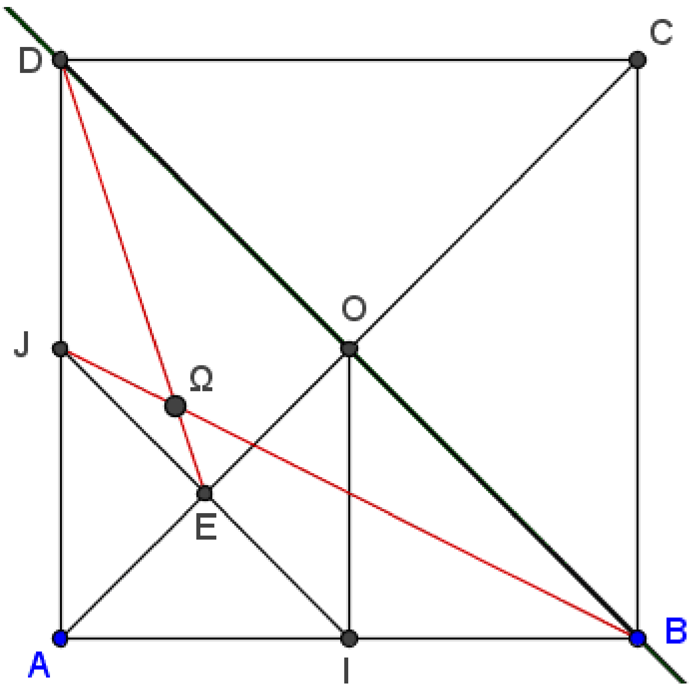
b) $g(B) = S_{(OI)}(S(B)) = S_{(OI)}(A) = B$

g est une similitude indirecte de rapport $\frac{OI}{DC} = \frac{1}{2} \neq 1$ *et telle que* $g(B) = B$

donc B est le centre de cette similitude.

$g(C) = I \Rightarrow$ *l'axe de g porte la bissectrice intérieure de l'angle* $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}\right)$

D'où l'axe de g est la droite (BD).



Exercice n°2

Partie A

1) Soit x un réel de l'intervalle $]-1,1[$, il est évident que $-x \in]-1,1[$.

Vérifions que $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x) \qquad \left(Car\ ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)\right)$$

D'où f est une fonction impaire et par suite l'origine du repère, O, est un centre de symétrie pour la courbe (C).

2) a) La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1$, $\varphi(x) > 0$

Donc f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a pour tout x appartenant à $]-1,1[$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{2}\frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}.$$

b)

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) $T : y = f'(0)x + f(0) = x$ car $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$ donc $T : y = x$.

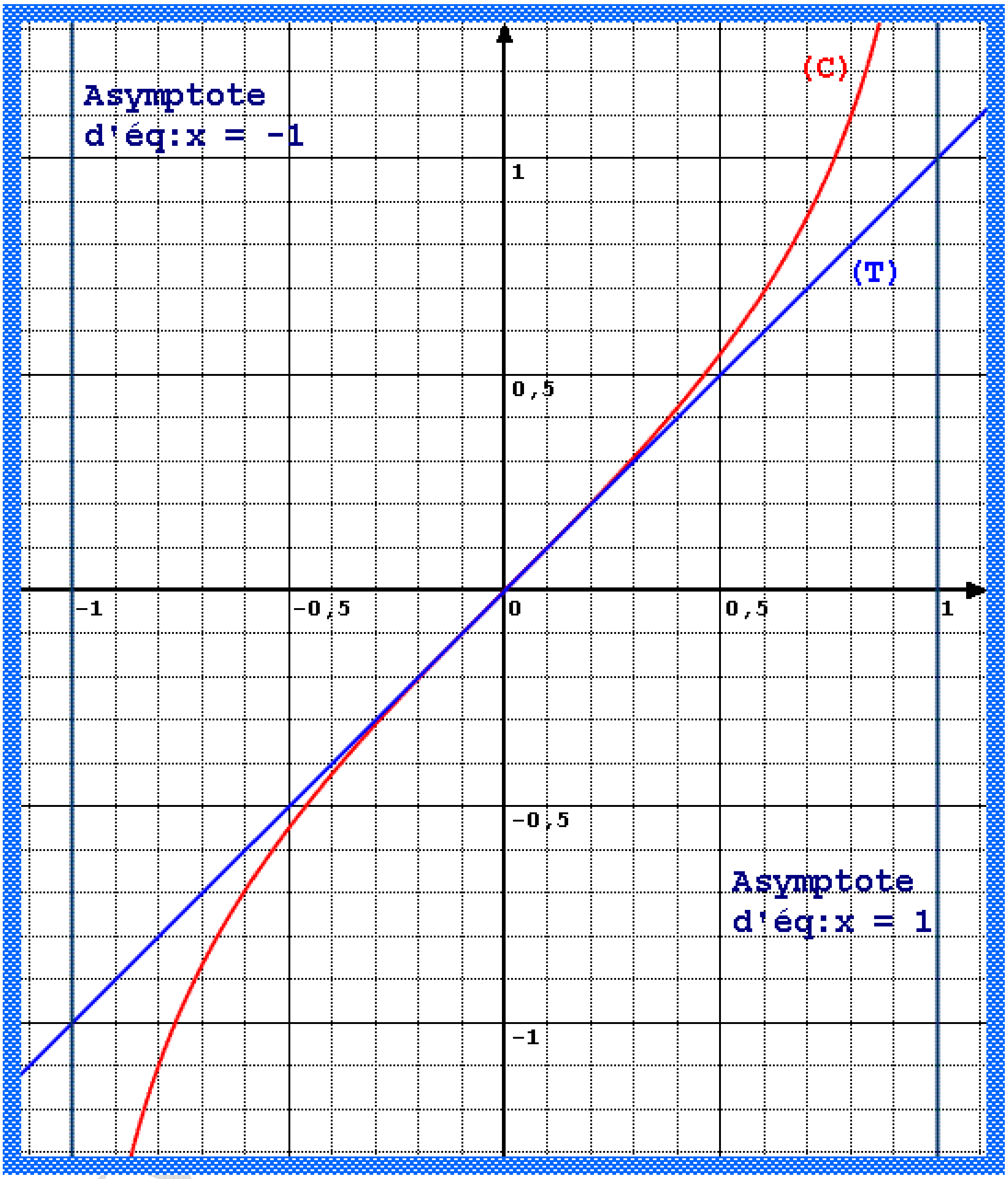
b) g est dérivable sur $]-1,1[$ et $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{1}{1-x^2} - 1 = \dfrac{x^2}{1-x^2} \geq 0$

x		0		1
$g'(x)$	$+$	0	$+$	
	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c)

x	-1	0	1
Signe de g	$-$	0	$+$
Position de (C) par rapport à T	*(C) au dessous de T*	$(C) \cap T = \{O\}$	*(C) au dessus de T*

4)



Partie B

1) a) $\forall t \in \left]0,\frac{1}{2}\right];\quad 1+t^2+t^4+...+t^{2n} = \sum_{k=0}^{n}\left(t^2\right)^k = \frac{1-\left(t^2\right)^{n+1}}{1-t^2} = \frac{1}{1-t^2} - \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}$

(Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison t^2*)*

Donc $\forall t \in \left]0,\frac{1}{2}\right];\quad 1+t^2+t^4+...+t^{2n} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} = \frac{1}{1-t^2}$

Cette égalité reste encore vraie pour $t = 0$.

b) Par passage à l'intégrale sur l'égalité précédente, on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} 1dt + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{2k}dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}dt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(2k+1)} t^{2k+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}dt$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)\times 2^{2k+1}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}dt = u_n + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}dt$$

2) a) $0 \le t \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le t^2 \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le -t^2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le 1-t^2 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{1-t^2} \le \frac{4}{3}$

Donc $0 \le \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} \le \frac{4}{3} t^{2n+2}$

b) $\forall t \in \left[0,\frac{1}{2}\right];\quad 0 \le \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} \le \frac{4}{3} t^{2n+2} \Rightarrow 0 \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}dt \le \frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{2n+2}dt$

donc $0 \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}dt \le \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2n+3} t^{2n+3}\right]_0^{\frac{1}{2}}$.

Ce qui donne $0 \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}dt \le \frac{4}{3}\frac{1}{2n+3}\frac{1}{2^{2n+3}} \le \frac{4}{3(2n+3)}$.

c)

$$\begin{cases} 0 \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}dt \le \frac{4}{3(2n+3)} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{3(2n+3)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}dt = 0 \qquad (1)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = [f(t)]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln 3 \qquad (2)$$

Or on a : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = u_n + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,dt \Leftrightarrow u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}\,dt \qquad (3)$

(1), (2) et (3) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\ln 3$.