Durée de l'épreuve : 2H

Devoir de contrôle n°2

Classe : 4M2

Prof : Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

Dans le plan orienté, on considère le carré ABCD de centre O tel que :
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des cotés $[AB]$ *et* $[AD]$.

Partie A

1) *Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en C et B en D.*
   Caractériser f.

2) *Soit g l'antidéplacement qui coïncide avec f sur A et B.*

   a) *Déterminer* $g\circ f(C)$ *et* $g\circ f(D)$.

   b) *Caractériser* $g\circ f$.

   c) *En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.*

Partie B

Soit s la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

1) a) *Déterminer le rapport et l'angle de s.*

   b) *Construire le centre* Ω *de s.*

2) a) *Déterminer les images des droites (BD) et (BC) par la similitude s.*

   b) *Trouver donc $s(B)$ et $s(A)$.*

   c) *Montrer que* Ω *est le barycentre des points pondérés (B,1) et (J,4).*

3) *Soit* σ *la similitude indirecte qui transforme D en O et C en I.*

   a) *Vérifier que* $\sigma = S_{(OI)}\circ s$ *où* $S_{(OI)}$ *désigne la symétrie orthogonale d'axe (OI).*
   Déterminer alors $\sigma(B)$.

   b) *Donner la forme réduite de* σ.

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *par:*

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\cos x} & si\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right] \\ f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x} & si\ x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Montrer que f est continue et dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

2) Vérifier que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

3) a) Etudier les variations de f.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *sur $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa fonction réciproque.*

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de f^{-1} dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$

5) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$.

et que :

$$\begin{cases} \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{-1}{(2-x)\sqrt{x^2-4x+3}} & si\quad x\in\,]-\infty,1[\\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} & si\quad x\in\,]1,+\infty[\end{cases}.$$

b) La fonction f^{-1} est elle dérivable en 1? Justifier votre réponse..

Correction du devoir de contrôle n°2

Correction de l'exercice n°1

Partie A

1) $AB = CD \neq 0$ donc il existe un seul déplacement f tel que $f(A)=C$ et $f(B)=D$.

Soit θ l'angle du déplacement f.

$$f(A)=C \text{ et } f(B)=D \Rightarrow \theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \pi \quad [2\pi]$$

Donc f est une symétrie centrale.

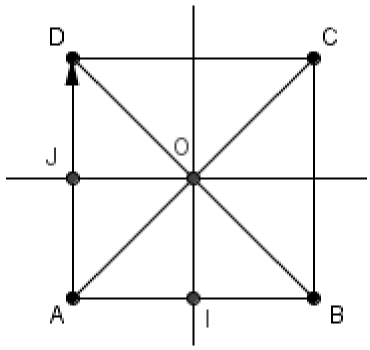
$f(A)=C$ donc O milieu de $[AC]$ est le centre de la symétrie centrale f.

2) a) On a: $f(C) = A$ et $f(D) = B$

Donc $gof(C) = g(A) = C$ et $gof(D) = g(B) = D$.

b) gof est un antidéplacement qui fixe deux points distincts

C et D donc c'est la symétrie orthogonale d'axe (CD).



c) $gof = S_{(CD)} \Leftrightarrow g = S_{(CD)}of$

$$\begin{cases} (OI) \perp (OJ) \\ (OI) \cap (OJ) = \{O\} \end{cases} \Rightarrow f = S_{(OJ)}oS_{(OI)}$$

D'où $g = S_{(CD)}oS_{(OJ)}oS_{(OI)}$

$$\begin{cases} (CD) \parallel (OJ) \\ S_{(CD)}oS_{(OJ)}(A) = D \end{cases} \Rightarrow S_{(CD)}oS_{(OJ)} = t_{\overrightarrow{AD}}$$

Alors $g = t_{\overrightarrow{AD}}oS_{(OI)}$ avec $\overrightarrow{AD}$ vecteur directeur de (OI)

Donc g est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{AD}$ et d'axe (OI).

Partie B

1) a) Le rapport de s est le réel k tel que $k = \dfrac{OI}{DC} = \dfrac{\frac{1}{2}AD}{DC} = \dfrac{1}{2}$ car $AD = DC$.

Son angle est le réel θ tel que $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OI}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

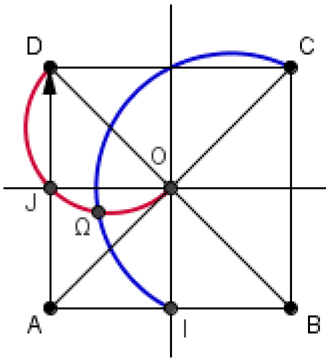
b) Soit Ω le centre de la similitude directe s.

$$\begin{cases} s(D) = O \\ s(C) = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega O}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega I}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

Donc $\{\Omega\} = \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ *où :*

$\mathscr{C}_1$ *est le demi cercle de diamètre* $[DO]$ *contenant le point J.*

$\mathscr{C}_2$ *est le demi cercle de diamètre* $[CI]$ *ne contenant pas le point K milieu de* $[DC]$



2) a) s est une similitude directe d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ *donc l'image d'une droite est une droite qui lui est perpendiculaire.*

S((BD)) est la perpendiculaire à (BD) passant par s(D) donc $s((BD)) = (AC)$.

S((BC)) est la perpendiculaire à (BC) passant par s(C) donc $s((BC)) = (AB)$

b) $\{B\} = (BD) \cap (BC) \Rightarrow \{s(B)\} = s((BD)) \cap s((BC)) = (AC) \cap (AB) = \{A\}$

D'où $s(B) = A$.

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$

Par passage aux images par s on trouve $\overrightarrow{Is(A)} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IO} = \overrightarrow{IJ}$ *donc* $s(A) = J$.

c) sos est la similitude directe de centre Ω*, de rapport* $\dfrac{1}{4}$ *et d'angle* π

Alors sos est l'homothétie de centre Ω *et de rapport* $-\dfrac{1}{4}$.

En plus $sos(B) = s(A) = J$ *donc* $h_{(\Omega, -\frac{1}{4})}(B) = J$. *Ce qui donne* $\overrightarrow{\Omega J} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\Omega B}$ *ou encore* $\overrightarrow{\Omega B} + 4\overrightarrow{\Omega J} = \vec{0}$ *d'où* Ω *est le barycentre des points pondérés* $(B,1)\,;(J,4)$.

3) a) $\sigma o s^{-1}$ *est la composée d'une similitude directe* s^{-1}, *de rapport 2, et d'une similitude indirecte* σ *de rapport* $\frac{1}{2}$ *(car* $\frac{OI}{DC} = \frac{1}{2}$*) donc c'est une similitude indirecte de rapport* $2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \sigma o s^{-1}$ *est un antidéplacement*

En plus $\Rightarrow \sigma o s^{-1}(O) = O$ *et* $\sigma o s^{-1}(I) = I$ *avec* $O \neq I$ *donc* $\sigma o s^{-1}$ *est la symétrie orthogonale d'axe (OI).* $\sigma o s^{-1} = S_{(OI)}$ *ce qui donne* $\sigma = S_{(OI)} o s$.

__Autrement__: Il suffit de montrer que σ *et* $S_{(OI)} o s$ *sont deux similitudes indirectes qui coïncident sur deux points distincts D et C donc elles sont égales.*

$\sigma(B) = S_{(OI)} o s(B) = S_{(OI)}(s(B)) = S_{(OI)}(A) = B$.

b) σ *est une similitude de rapport différent de 1 et* $\sigma(B) = B$ *alors B est le centre de cette similitude.*

$\sigma(C) = I$ *donc l'axe de cette similitude indirecte porte la bissectrice interieur de l'angle* $\widehat{CBI}$ *qui est la droite (BD) car ABCD est un carré.*

Alors $\sigma = h o S_{(BD)} = S_{(BD)} o h$ *où h est l'homothétie de centre B et de rapport* $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice n°2

1) __Continuité en 0__

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x - 1}{\cos x} = 1 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue à droite en 0.}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\cos x} = 1 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue à gauche en 0.}$$

f est continue à droite et à gauche en 0 donc f est continue en 0.

__Dérivabilité en 0__

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 0 \times 1 = 0$$

Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2\cos x - 1}{\cos x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 0 \times 1 = 0 D$$

onc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

f dérivable à gauche et à droite en 0 et $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2) Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *on a* $-x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Montrons que $f(-x) = 2 - f(x)$

- *Si* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ *alors* $-x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *et on a:*

$$f(-x) = \frac{2\cos(-x) - 1}{\cos(-x)} = \frac{2\cos x - 1}{\cos x} = 2 - \frac{1}{\cos x} = 2 - f(x).$$

- *Si* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *alors* $-x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ *et on a :*

$$f(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = 2 - \left(2 - \frac{1}{\cos x}\right) = 2 - \frac{2\cos x - 1}{\cos x} = 2 - f(x).$$

D'où A(0,1) est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

3) a) f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *(évident)*

Calculons $f'(x)$ *pour* $x \neq 0$.

- *Si* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $f'(x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} < 0$

- *Si* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \frac{-2\sin x \times \cos x - (-\sin x)(2\cos x - 1)}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x}{\cos^2 x} < 0$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$-\infty$

b) Voir figue

4) a) f est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$ $(=\mathbb{R})$

b) Voir figure

5) a) f dérivable sur chacun des intervalles $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ et $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x)\neq 0$

Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$

Donc f^{-1} est dérivable sur chacun des intervalles $f\left(\left]-\frac{\pi}{2},0\right[\right)$ et $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

Ou encore respectivement $]1,+\infty[$ et $]-\infty,1[$.

- Si $x\in]-\infty,1[$, il existe $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(y)=x$.

$$f(y)=x \Leftrightarrow 2-\frac{1}{\cos y}=x \Leftrightarrow \cos y=\frac{1}{2-x}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=-\frac{\cos^2 y}{\sin y}=-\frac{\cos^2 y}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \qquad \left(\text{car } y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \sin y>0\right)$$

$$=-\frac{\left(\frac{1}{2-x}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2-x}\right)^2}}=\frac{-1}{\frac{(2-x)^2}{2-x}\sqrt{(2-x)^2-1}}=\frac{-1}{(2-x)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

- Si $x\in]1,+\infty[$, il existe $y\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ tel que $f(y)=x$.

$$f(y)=x \Leftrightarrow \frac{1}{\cos y}=x \Leftrightarrow \cos y=\frac{1}{x}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{\cos^2 y}{\sin y}=\frac{\cos^2 y}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} \qquad \left(\text{car } y\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[\Rightarrow \sin y<0\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{-\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=\frac{-1}{\frac{x^2}{x}\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

b) La courbe $\mathscr{C}'$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 1 donc f^{-1} n'est pas dérivable en 1.