LYCEE DE SBEITLA		
DEVOIR DE CONTROLE N°1	CLASSE: 4 ème T3	DATE: 27/10/2007
EPREUVE: Mathematiques	DURÉE: 2H	PROF: Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On donne les points A et B d'affixes respectives 2i et -2i

Pour tout point $M(z)$ *du plan* $P\setminus\{B\}$ *on associe le point* $M'(z')$ *tel que* $z'=\dfrac{z-2i}{z+2i}$

1) *On pose* $z=x+iy$ *et* $z'=x'+iy'$ *où* x, y, x' *et* y' *sont des réels.*

a) *Montrer que* $\begin{cases} x'=\dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+(y+2)^2} \\ y'=\dfrac{-4x}{x^2+(y+2)^2} \end{cases}$

b) *En déduire alors les ensembles suivants :*

$$E=\{M(z)\in P \ \ tq \ \ z'\in\mathbb{R}\}$$

$$F=\{M(z)\in P \ \ tq \ \ z' \text{ imaginaire pur}\}$$

$$G=\{M(z)\in P \ \ tq \ \ Re(z')=Im(z')\}$$

2) a) *Soit* $z\in\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$; *vérifier que* $z'-1=\dfrac{-4i}{z+2i}$

b) *En déduire que si le point* $M(z)$ *varie sur le cercle C de centre B et de rayon 1 alors le point* $M'(z')$ *varie sur un cercle fixe que l'on précisera.*

3) *Montrer que pour tout nombre complexe z different de* $-2i$ *on a :*

$$\arg(z'-1)=-\arg(z+2i)-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{où } k\in\mathbb{Z}$$

4) *On pose* $z=2e^{i\theta}$ *où* $\theta\in[0,2\pi[\setminus\left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

a) *Vérifier que* $e^{i\theta}-i=-2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$ *et* $e^{i\theta}+i=2i\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

b) *En d'duire que* z' *est imaginaire pur.*

Exercice n°2

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos x+\cos^2 x}$

1) a) *Soit* $t\in\mathbb{R}$; *calculer* $\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

b) En déduire que pour tout réel t on a : $1+t+t^2 \geq \frac{3}{4}$

c) Donner le domaine de définition de f

2) a) Montrer que pour tout réel x on a : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+\cos x+\cos^2 x} \leq \frac{4}{3}$

b) Déterminer alors les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

EXERCICE N°3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x-\sin x+1$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet, dans $\mathbb{R}$, une solution unique α et que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}\right[$

2) Montrer que $\cos\alpha = 2\sqrt{-\alpha^2-\alpha}$

BON TRAVAIL

لا يحمِلُ الحِقْدَ مَنْ تَعْلو بِهِ الرُّتَبُ   ولا ينالُ العلى من طبعهُ الغضبُ

عنترة بن شدّاد