Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°2

Classe : 4ème ScExp

Fevrier 2016

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$, *on désigne par* $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) *Montrer que la droite d'équation* $x=-1$ *est un axe de symétrie de la courbe* $\mathscr{C}$.

2) *Dresser le tableau de variation de f.*

3) a) *Montrer que la droite* $\Delta : y=x+1$ *est une asymptote à la courbe* $\mathscr{C}$ *au voisinage de* $+\infty$.

b) *Tracer la courbe* $\mathscr{C}$.

4) *On désigne par g la restriction de f à l'intervalle* $[-1,+\infty[$.

a) *Montrer que g réalise une bijection de* $[-1,+\infty[$ *sur* $[2,+\infty[$.

b) *Montrer que pour tout* $x\in[2,+\infty[,\ g^{-1}(x)=-1+\sqrt{x^2-4}$.

c) *Tracer la courbe* $\mathscr{C}'$ *de* g^{-1}.

Exercice 2 (5.5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *par :* $f(x)=1-\sin x$

1) a) *Etudier les variations de f.*

b) *En déduire que f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle* $[0,2]$.

c) *Calculer* $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* $f^{-1}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) *Montrer que* f^{-1} *est dérivable sur* $]0,2[$ *et* $\forall x\in]0,2[,\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

3) a) Montrer que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie pour la courbe représentative de f

b) Montrer par deux méthodes que $\forall x \in [0,2],\ f^{-1}(2-x)+f^{-1}(x)=0.$

Exercice 3 (8 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(0,1,0)$; $B(1,0,-2)$; $C(0,0,-1)$ et $D(1,-1,0)$.

1) a) Déterminer les composants du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis calculer $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$

b) En déduire que les points A, B, C déterminent un plan P et que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD puis déduire la distance du point D au plan P.

2) a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $x-y+z+1=0$.

b) Montrer que le point $H(0,0,-1)$ est le projeté orthogonal de D sur le plan P.

3) Soit l'ensemble $S=\left\{M(x,y,z) \text{ de l'espace tels que } x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0\right\}$

a) Montrer que le point $E(2,-2,\sqrt{2})$ appartient à S.

b) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

c) Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle $\mathscr{C}$ que l'on caractérisera.

4) Déterminer l'ensemble des points M de P tels que le triangle MDE soit isocèle et rectangle en D.
