LYCEE DE SBEITLA

Mathématiques

Section : 4ème Mathématiques

BAC BLANC 2007

Durée de l'épreuve: 4 heures - Coefficient : 4

Professeur : Dhaouadi Nejib

Date : 11/05/2007

Ce devoir comporte 4 pages de 1/4 à 4/4

Exercice n°1

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne.

Elle révèle que 40% des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35% des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons. Sur l'ensemble de la clientèle, 40% choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe.

En fait, 60% des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20% des clients pour raison touristiques voyagent en première classe.

On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi.

On note :

A l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »

T l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »

D l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques»

V l'événement « le client interrogé voyage en première classe ».

1. *Déterminer: P(A), P(T), P(V), P(V/A) et P(V/T).*
2. *a. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.*

   b. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.

   c. En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.
3. *Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.*
4. *Soit un entier n supérieur ou égal à 2. On choisit n « clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante.*

   On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.

   a. Prouver que : $p_n = 1 - (0,4)^n$

   b. Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0,9999$

Exercice n°2

On considère un carré PQRS. On note F le symétrique de Q par rapport à P et I le symétrique de F par rapport à Q. Soit (H) l'hyperbole dont l'un des foyers est F, tangente à la droite (SP) en S et tangente à la droite (RQ)

1. Soit F' le second foyer de (H).

a. Montrer que F' appartient à la médiatrice Δ de $[QI]$.

b. Montrer aussi que F' appartient à la droite (SQ)

Construire alors F' et vérifier que les droites (SF) et (SF') sont perpendiculaires

2. On note O le centre de l'hyperbole (H).

a. Montrer que O appartient à la médiatrice de $[PQ]$.

b. Montrer que (SF') est tangente au cercle principal de (H) en Q.

3. Soit S' le symétrique de S par rapport à O.

a. Montrer que $S_O((SP)) = (RQ)$.

b. En déduire que S' est le point de contact de la tangente (RQ) avec (H).

4. a. Montrer que (OQ) est une asymptote à (H).

b. Construire les sommets A et A' de l'hyperbole (H) et l'autre asymptote.

c. Tracer (H)

Problème

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\left[1+(\ln x)^2\right]}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A. *1) a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$ on a:*

$$f'(x) = -\left[\frac{1+\ln x}{x\left[1+(\ln x)^2\right]}\right]^2$$

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et drésser le tableau de variation de f

c. Donner une équation cartésienne de la tangente D à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

d. Tracer (C) et D dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

2) a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]0,+\infty[$

(on ne demande pas de calculer $f^{-1}(x)$)

b. Etudier la dérivabilité de f^{-1} au point $\dfrac{e}{2}$.

B. *On considère la fonction F définie sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *par :* $F(x)=\int_1^{e^{\tan(x)}} f(t)dt$

1) a. *Justifier l'existence de F*

b. *Montrer que F est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *et définir sa fonction dérivée.*

c. *En déduire que pour tout* $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *; on a :* $F(x)=x$.

2) a. *Montrer que* $\int_1^e f(t)dt=\frac{\pi}{4}$.

b. *Calculer, en* cm^2, *l'aire A de la région du plan limitée par la courbe (C)*

et les droites d'équations $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ *et* $y=0$.

C. *Considérons la suite réelle* (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Soit x un réel strictement positif donné ; on pose, pour tout entier naturel non nul n ;

$S_n(x)=\frac{1}{x}\left[1-(\ln x)^2+(\ln x)^4+....+(-1)^n(\ln x)^{2n}\right]$.

1) *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(x)=f(x)+(-1)^n\frac{(\ln x)^{2n+2}}{x\left[1+(\ln)^2\right]}$

2) a. *Soit k un entier naturel non nul. Calculer* $\int_1^e \frac{1}{x}(\ln x)^{2k}dx$

b. *En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a :*

$u_n=\frac{\pi}{4}+R_n(x)$ où $R_n(x)=(-1)^n\int_1^e\frac{(\ln x)^{2n+2}}{x\left[1+(\ln x)^2\right]}$

c. *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *on a :* $|R_n(x)|\leq\frac{1}{2n+3}$

d. *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

https://www.sigmaths.net