

BAC BLANC

Exercice N°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exactes . Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie . Aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte vaut 1 point , une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point .

❶ Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, alors $f'(x)$ est égal à

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ b) $\frac{-\ln 3}{3^x}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3$

❷ La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^3 e^{-x^2}$ sur l'intervalle $[-2, 2]$ est:

- a) $\frac{e^{-4}}{4}$ b) $\frac{e^{-4}}{8}$ c) 0

❸ Soit n un entier naturel. Le complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si

- a) $n = 3$ b) $n = 6k + 3$; avec $k \in \mathbb{Z}$ c) $n = 6k$; $k \in \mathbb{Z}$

Exercice N°2 (4 points)

Dans la figure ci-contre on donne un cube ABCDEFGH et K le milieu de $[CG]$

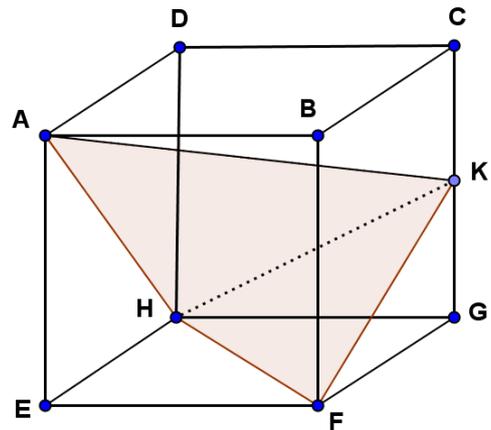
A/ Soit h l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et qui envoie A sur C.

❶ Déterminer :

- a) $h(E)$.
 b) Les images des plans (ABC) et (ABE) par h .
 ❷ Reproduire la figure sur votre copie puis construire le centre O de h .

B/ Maintenant on munit l'espace du repère orthonormé direct $(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$.

- ❶ Déterminer graphiquement les coordonnées des points : A, F, H et K.
 ❷ a) Calculer les distances AF et AK.
 b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AK}$.



c) En déduire la mesure en radians de l'angle FAK .

③ Calculer le volume du tétraèdre AFKH.

Exercice N°3

(3 points)

① On considère l'équation (E) : $23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

c) En déduire qu'il existe un unique **entier** x appartenant à l'intervalle $[1;46]$ tel que $23x \equiv 1[47]$.

② Soient a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que si $ab \equiv 0[47]$ alors $a \equiv 0[47]$ ou $b \equiv 0[47]$

b) En déduire que si $a^2 \equiv 1[47]$ alors $a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1[47]$.

③ Montrer que pour tout **entier** p de l'intervalle $[1;46]$, il existe un unique entier relatif q tel que $pq \equiv 1[47]$

Exercice N°4

(5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB=AC$ et $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\overline{CA}, \overline{CI}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Pour la figure

Que l'on complètera en traitant les questions, on prend $AB=5\text{cm}$.

① On appelle R_A la rotation de centre A qui transforme B en C et R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = R_C \circ R_A$.

a) Déterminer les images par f de A et de B.

b) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.

c) Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ?

② Soit S la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par S, H le milieu du segment $[BC]$ et H' son image par S.

a) Donner une mesure de l'angle de S.

Montrer que C' appartient à la droite (OA).

b) Donner l'image par S du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$.

c) Montrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à (OB).

En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

Exercice N°5

(5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

A/

① a) Etudier les variations de f .

b) Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

② Tracer la courbe C_f de f et sa tangente au point d'abscisse 1.

③ a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}^*+ sur un intervalle J à préciser.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; +\infty[$ et que:

B/

❶ a) Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$

b) Vérifier que : $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{n} - f(n)$

c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul , $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$

❷ On considère la suite (S_n) définie sur \mathbb{N}^* par: $S_n = \sum_n^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(2n) \leq S_n$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de (-1) et de 0 , on ait:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

c) En déduire l'égalité: $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$

d) En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de la somme suivante : $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n-1) + f(2n)$

Bon Travail

KKK 'G' A5H<G'H?