Devoir de synthèse n°3

LYCEE SBEITLA

✧✧✧

# EPREUVE DE MATHEMATIQUES

**31 Mai - 2010**

✧✧✧

**SECTION : 3 EME ↫ MATHEMATIQUES ↬**

**PROF: MISSAOUI TAOUFIK**

**DUREE: 3 heures**

## Exercice 1: ( 3 points )

*Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.*
*L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*
*Une réponse correcte vaut 0,5 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.*

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points

$A(1,0,-1)$ ; $B(1,-2,1)$ ; $C(0,-1,2)$ *et* $D(-3,-2,-3)$

**1)** Soit $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ alors :

a) $\vec{n}=-4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ b) $\vec{n}=-4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ c) $\vec{n}=4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

**2)** Une équation du plan $(ABC)$ est:

a) $2x+y+z-1=0$ b) $-2x+y-z-1=0$ c) $2x-y+z-1=0$

**3)** L'aire du triangle ABC est égale à:

a) $\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

**4)** Le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) est:

a) Le point B b) Le point A c) Le point C

**5)** Une équation de la sphère (S) de centre O et passant par A est:

a) $x^2+y^2+z^2=\sqrt{2}$ b) $x^2-y^2+z^2=2$ c) $x^2+y^2+z^2=2$

**6)** L'intersection de la sphère (S) et le plan (ABC) est:

a) Un cercle b) Le vide c) Réduite à un singleton

## Exercice 2: ( 5 points )

Soit la fonction $f$ définie sur IR par $f(x) = 2\sin(x) - \sin(2x)$ et ( $\mathscr{C}$ ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**1)** $a-$Monter que $f$ est impaire et périodique de période $2\pi$.

$b-$En déduire que l'on peut étudier $f$ sur l'intervalle $\left[0\ ;\pi\right]$

**2)** $a-$Montrer que pour tout x de IR, on a $f'(x) = (1-\cos x)(4\cos x + 2)$

$b-$Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\left[0\ ;\pi\right]$

**3)** $a-$Vérifier que pour tout x de IR, on a $f(x) = 2\sin x(1-\cos x)$

$b-$En déduire les coordonnées des points d'intersection de ( $\mathscr{C}$ ) et l'axe des abscisses $(O,\vec{i})$.

**4)** $a-$Préciser les transformations géométriques qui permettent de tracer la courbe ( $\mathscr{C}$ ') de la restriction de $f$ à l'intervalle $\left[-\pi\ ;3\pi\right]$.

$b-$Tracer ( $\mathscr{C}$ ')

## Exercice 3: ( 4 points )

Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout n de IN par

$$\begin{cases} u_0 \in \left]-1;0\right[ \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{2+u_n}} \end{cases}$$

**1)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+u_0}}\right)^n$

**2)** Montrer par récurrence que pour tout n de IN on a $-1 < u_n < 0$.

**3)** Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante

**4)** $a-$ Montrer que pour tout n de IN on a $u_{n+1} \geq \dfrac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

$b-$Montrer par récurrence que pour tout n de IN, on a $u_n \geq \dfrac{u_0}{\left(\sqrt{2+u_0}\right)^n}$.

$c-$Calculer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$

## Exercice 4: ( 4 points )

**1)** Une urne contient quatre jetons blancs numérotés 1,1,2,3 et deux jetons rouges numérotés 1,2 indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard trois jetons de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des évènements ci-dessous:

$a-$ A " Obtenir un seul jeton rouge "

$b-$ B " Obtenir au moins un jeton rouge "

$c-$ C " La somme des chiffres marqués sur les jetons tirés est égale à 5 "

**2)** On suppose que l'urne contient n jetons blancs $(n \geq 2)$ et deux jetons rouges.

On tire au hasard successivement avec remise deux jetons de l'urne.

Soit l'évènement $A_n$ " Obtenir deux jetons de couleurs différentes "

$a-$Calculer en fonction de n la probabilité $p_n$ de l'évènement $A_n$.

$b-$ Déterminer la valeur de n pour que $p_n$ soit maximale.

## Exercice 5: (4 points)

*Les deux parties I et II sont indépendantes*

**I-** 1) Les entiers naturels $356, \ 359 \ \ et \ \ 381$ sont-ils premiers? Justifier votre réponse.

2) Déterminer le nombre premier $p$ qui divise $3^p + 356$.

II- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a = 7n + 5$ , $b = 5n + 2$ et $d = a \wedge b$.

1) Calculer $5a - 7b$ et en déduire que $d = 1 \; ou \; d = 11$

2) On suppose que $d = 11$.

$a-$Montrer qu'ils existent deux entiers naturels $a'$ et $b'$ tels que $5(a' - 3) = 7(b' - 2)$

$b-$Déterminer les valeurs de $a'$ et de $b'$.

$c-$Déduire les entiers naturels n non nuls tels que $a \wedge b = 11$