Classe : 3ème M **Prof** : M-Taoufik

Devoir de synthèse n° (3)

Durée : 3heures **Date** : 25/05/2009

Exercice n°1 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous l'élève indiquera sur sa copie le numéro de l'affirmation et la mention « vraie » ou « fausse ». Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point et l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1) Le nombre $2^{100}-1$ est divisible par 101.
2) La suite $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}, n \in \mathbb{N}$ converge vers 0.
3) Le nombre complexe $(5-i)(2+3i)(1+i)(5+i)(2-3i)(1-i)$ est imaginaire pur.
4) Si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormé directe de l'espace alors $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$.

Exercice n°2 (5 points)

En prévision du lancement d'un produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Prix X de vente en dinars	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre Y d'acheteurs éventuels	180	160	150	130	100	90	80	70

1°) Représenter graphiquement le nuage de points de la série double (X,Y)

2°) Calculer la moyenne de chacune des deux variables X et Y.

3°) a) Calculer les coordonnées du point moyen G_1 des quatre premiers points, puis les coordonnées du point moyen G_2 des quatre derniers points.

b) Placer ces points sur le graphique et tracer la droite (G_1G_2)

c) On admet que la droite (G_1G_2) est une droite d'ajustement affine du nuage de points.

Estimer graphiquement le prix de vente pour que le nombre d'acheteurs soit égal à 50.

4°) a) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2)

b) En déduire le prix de vente pour que le nombre d'acheteurs soit supérieur ou égal à 205

Exercice n°3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1,0,-1)$; $B(1,-2,1)$; $C(0,-1,2)$ *et* $D(-3,-2,-3)$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$
2) a. Montrer que le plan (ABC) a pour équation : $2x+y+z-1=0$

   b. Calculer l'aire du triangle ABC
3) Soit H le projeté orthogonal du point $\Omega(2,2,1)$ sur le plan (ABC)

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ΩH)

   b. Déduire les coordonnées du point H
4) Soit S la sphère de centre Ω et passant par A.

   a. Ecrire une équation de la sphère S

   b. Montrer que l'intersection de la sphère S et le plan (ABC) est un cercle dont on déterminera son centre et son rayon

---

Exercice n°4 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\dfrac{n}{3^n}$ où $n\geq 1$.

1) a. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ on a $u_{n+1}\leq\dfrac{2}{3}u_n$

   b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
2) Soit un réel $a>0$ et (b_n) la suite définie pour $n>1$ par $b_n=\dfrac{n}{(1+a)^n}$

   a. Montrer, en utilisant la formule de binôme que $(1+a)^n\geq\dfrac{n(n-1)a^2}{2}$

   b. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$ et trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Exercice n°5 (4 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$a_n=2\times10^n+1$ et $b_n=2\times10^n-1$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geq 1$, a_n est divisible par 3
2) a. Le nombre b_3 est-il composé ? Justifier votre réponse.

   b. Le nombre $2^{1998}-1$ est-il divisible par b_3 ? Justifier votre réponse.
3) a. Montrer que $a_n\wedge b_n=b_n\wedge 2$

   b. Déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.
4) Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que : $a_3(x-2)=b_3(y-3)$
