Devoir de synthèse N°1

Lycée Bechri 2011/2012 4ème Sc_Exp 2 Prof: Lahmadi Adel

Exercice N°1 (3 points)

Répondre par **Vrai** *ou* **Faux** **en justifiant la réponse**.

❶ L'image dans le plan complexe du nombre complexe $z=(1+i)^{2012}$ appartient à l'axe réel.

❷ Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=2$ alors $\lim\limits_{x\to 0}(f\circ g)(x)=1$.

❸ Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n=\dfrac{2^n}{(-5)^{n+1}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=0$.

Exercice N°2 (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

❶ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+2\sqrt{2}\,z+6=0$

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A=2-i\sqrt{2}$ et $z_B=2+i\sqrt{2}$

❷ Placer dans le plan complexe les points A et B.

❸ Montrer que les points A et B appartiennent au cercle **C** de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.

❹ Soient I, J et K les points d'affixes respectives z_I, z_J et z_K telles que: $z_I=2i$

z_J est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{3\pi}{4}$; $z_K=-z_J$

a) Donner la forme algébrique de z_J.

b) Placer les points I, J et K dans le plan complexe.

❺ Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.

❻ Donner le rayon du cercle **C'** circonscrit au triangle IJK.

❼ Soit **E** l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation: $2<|z|<\sqrt{6}$.

a) Tracer les cercles **C** et **C'** .

b) Représenter l'ensemble **E** sur le graphique précédent à l'aide de hachures.Justifier.

Exercice N°3 (6 points)

Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\dfrac{1+U_n{}^2}{2U_n} \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

❶ a) Montrer que pour tout entier naturel n : $U_n>1$.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

En déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

Date
Le 7/12/2011
Durée
2H

❷ a) *Montrer que pour tout entier naturel n :* $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

b) *En déduire que pour tout entier naturel n :* $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) *Calculer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

❸ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *; On pose* $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

a) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $n < S_n < n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) *En déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice N°4 **(5 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} - x & si\ x \in]-\infty, 0] \\ x^3 + 2 + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \in]0, +\infty[\end{cases}$

❶ *Déterminer* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

❷ a) *Montrer que f est continue sur* $]-\infty, 0]$

b) *Montrer que* $x^3 + 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^3 + 2 + x^2$ *pour tout* $x > 0$.

c) *Montrer alors que f est continue en 0.*

❸ a) *Montrer que f est dérivable sur* $]-\infty, 0]$.

b) *Déterminer f '(x) pour* $x \in]-\infty, 0]$ *puis déterminer son signe.*

c) Montrer que $x^2 - x \leq \frac{f(x) - 2}{x} \leq x^2 + x$ *pour tout* $x > 0$.

d) *f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement le résultat trouvé.*

Bon Travail