Les suites réelles

Dhaouadi Nejib

https://www.sigmaths.net

Suites Réelles

Dans ce chapitre I désigne l'ensemble des entiers $n \geq n_0 \quad (n_0 \in \mathbb{N})$

I. Rappels et compléments

1. Suite arithmétique

Définition

Soit (u_n) une suite réelle définie sur I.

On dit que (u_n) est une suite arithmétique s'il existe une constante réelle r telle que pour tout entier n de I, $u_{n+1} - u_n = r$.

On dit dans ce cas que (u_n) est une suite arithmétique de raison r

Conséquences

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

- Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
- Pour tous entiers naturels p et q on a : $u_p = u_q + (p-q)r$.
- Pour tous entiers naturels p et q tels que $p \leq q$, on a :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q = \frac{q-p+1}{2}(u_p + u_q)$$

2. Suite géométrique

Définition

Soit (u_n) une suite réelle définie sur I.

On dit que (u_n) est une suite géométrique s'il existe une constante réelle q telle que pour tout entier n de I, $u_{n+1} = qu_n$.

On dit dans ce cas que (u_n) est une suite géométrique de raison q

Conséquences

Soit (u_n) une suite géométrique de raison non nul q et de premier terme u_0

- Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$.
- Pour tous entiers naturels n et m on a : $u_n = u_m q^{n-m}$.
- Pour tous entiers naturels m et n tels que $n \leq m$, on a :

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m = \begin{cases} u_p \dfrac{1-q^{m-n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ (m-n+1)\, u_0 & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

- $$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad q > 1 \\ 1 & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < q < 1 \\ \text{n'existe pas si} & q \leq -1 \end{cases}$$

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 4}{n+1}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = n\ u_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.

Solution

1. $v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n = nu_n + 4 - nu_n = 4 \Rightarrow (v_n)$ est une suite arithmétique de raison r=4 et de premier terme $v_1 = 1 \cdot u_1 = 1$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_1 + (n-1)r = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$ et $u_n = \dfrac{v_n}{n} = \dfrac{4n-3}{n}$.

Exercice 2

Soit $a > 1$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, (u_n) existe et vérifie $u_n > 1$.
2. On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer v_n et puis u_n en fonction de n et a.

Solution

1. On procède par récurrence
   - Pour n=0, on a $u_0 = a > 1$, vrai
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n existe et $u_n > 1$ et montrons que u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 1$.

     $u_n > 1 \Rightarrow 2u_n > 2 \Rightarrow 2u_n - 1 > 1 \Rightarrow 2u_n - 1 \neq 0 \Rightarrow u_{n+1}$ existe

     $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1} - 1 = \dfrac{3u_n - 2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1} = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

     $u_n > 1$ donc $2u_n - 1 > 0$ et $u_n - 1 > 0$ donc $u_{n+1} - 1 > 0$ d'où $u_{n+1} > 1$.

2. a) $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1} \Rightarrow v_{n+1} - v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{2(u_n - 1)}{u_n - 1} = 2$

   Ce qui prouve que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2

   Son premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{a-1}$.

   b) $v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{a-1} + 2n = \dfrac{2(a-1)n + 1}{a-1}$

   $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{a-1}{2(a-1)n+1} + 1 = \dfrac{a + 2(a-1)n}{2(a-1)n+1}$

Exercice 3 (suite Arithmético-géométrique)

Soit (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 6$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer v_n et puis u_n en fonction de n
3. Calculer, en fonction de n, la somme $S = \sum_{k=n}^{2n} u_k$.

Solution

1. $v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}(u_n + 6) = \frac{1}{2}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 7$.

2. $v_n = v_0 q^n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n - 6 = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$

3. $S = \sum_{k=n}^{2n} u_k = \sum_{k=n}^{2n} (v_k - 6) = \sum_{k=n}^{2n} v_k - 6(2n - n + 1) = v_n \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 6(n+1)$

Donc $S = 14\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - 6(n+1)$

3. Convergence et divergence d'une suite

Définition

Soit (u_n) une suite réelle définie sur I.

On dit que (u_n) est **convergente** (ou encore admet une limite finie) s'il existe un réel l vérifiant : Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \in I, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Autrement dit, tout intervalle ouvert de centre l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Parfois on dit, tout intervalle ouvert de centre l contient **presque** tous les termes de la suite.

Remarques

- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente** (admet une limite infinie ou n'admet pas de limite)
- Si une suite (u_n) admet une limite finie l alors cette limite est unique et on note dans ce cas $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ ou tout simplement $\lim u_n = l$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2n-5}{n+1}$.

Montrons que (u_n) converge vers 2.

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe un entier naturel p tel que pour tout entier naturel n, $n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$

$$|u_n - 2| = \left|\frac{2n-5}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{\cancel{2n} - 5 - \cancel{2n} - 2}{n+1}\right| = \frac{7}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{7}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{7}{\varepsilon} - 1$$

Il suffit alors de choisir $p = E\left(\dfrac{7}{\varepsilon} - 1\right) + 1$ si $\dfrac{7}{\varepsilon} - 1 > 0$ (E désigne la partie entière)

ou p=1 si $\dfrac{7}{\varepsilon} - 1 < 0$ et pour le dire en un seul mot $p = sup\left(1, E\left(\dfrac{7}{\varepsilon} - 1\right) + 1\right)$.

Ainsi on a : $n \geq p > \dfrac{7}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \dfrac{7}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$

Définition

- On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ et on note $lim\, u_n = +\infty$ si pour tout réel $A > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \in I$, $n \geq p \Rightarrow u_n > A$.
  Autrement dit, tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p.
- On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ et on note $lim\, u_n = -\infty$ si pour tout réel $A < 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \in I$, $n \geq p \Rightarrow u_n < A$.
  Autrement dit, tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2n^2 - 1$

Montrons que $lim\, u_n = +\infty$.

Soit $A > 0$, montrons qu'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \in I$, $n \geq p \Rightarrow u_n > A$.

$$u_n > A \Leftrightarrow 2n^2 - 1 > A \Leftrightarrow 2n^2 > A + 1 \Leftrightarrow n^2 > \frac{A+1}{2} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{A+1}{2}} \text{ car } n \in \mathbb{N}.$$

il suffit alors de choisir $p = E\left(\sqrt{\dfrac{A+1}{2}}\right) + 1$.

4. Opérations sur les suites convergentes

Comme pour les fonctions, on peut définir les opérations usuelles sur les suites.

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur I.

Pour tout entier $n \in I$, on a :

- $(u+v)_n = u_n + v_n$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda u)_n = \lambda \times u_n$.
- $(uv)_n = u_n \times v_n$
- Si (v_n) est une suite à termes non nuls alors : $\left(\frac{1}{v}\right)_n = \frac{1}{v_n}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{u_n}{v_n}$.

Théorème I

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur I.

Si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors :

les suites $u+v$, λu $(\lambda \in \mathbb{R})$, uv et $|u|$ sont convergentes.

Si en plus (v_n) est une suite a termes non nuls et $\lim v_n \neq 0$ alors les suites $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont convergentes et on a :

$\lim(u+v)_n = \lim u_n + \lim v_n$.

$\lim(\lambda u)_n = \lambda \times \lim u_n$.

$\lim(uv)_n = \lim u_n \times \lim v_n$.

$\lim |u_n| = |\lim u_n|$

$\lim \left(\frac{1}{v}\right)_n = \frac{1}{\lim u_n}$.

$\lim \left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

Exercice

Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

a) $u_n = \frac{2-3n+n^2}{n^2+n+1}$ b) $u_n = \sqrt{4n^2+1} - 2n$ c) $u_n = \frac{(-3)^n - 1}{(-3)^n + 1}$

Solution

a) $\lim u_n = \lim \frac{2-3n+n^2}{n^2+n+1} = \lim \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n} + 1\right)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim\left(\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n} + 1\right)}{\lim\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\lim u_n = \lim \sqrt{4n^2+1} - 2n = \lim \frac{\cancel{4n^2} + 1 - \cancel{4n^2}}{\sqrt{4n^2+1} + 2n} = \lim \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n} = 0$

c) $\lim u_n = \lim \frac{(-3)^n - 1}{(-3)^n + 1} = \lim \frac{1 - \frac{1}{(-3)^n}}{1 + \frac{1}{(-3)^n}} = \lim \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n} = 1$ car la suite

$n \mapsto \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$ donc sa limite égale à 0.

Théorème 2

Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini.

$lim\, u_n = a \Leftrightarrow lim\, u_{2n} = lim\, u_{2n+1} = a$

Démonstration

Supposons dans la suite que a est fini

Montrons que $lim\, u_n = a \Rightarrow lim\, u_{2n} = lim\, u_{2n+1} = a$

Soit $\varepsilon > 0$, $lim\, u_n = a \Rightarrow il$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I$, $n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$

Et puisqu'on a pour tout $n \in I$, $2n+1 \geq 2n \geq n$ alors :

$n \geq p \Rightarrow \begin{cases} |u_{2n} - a| < \varepsilon \\ |u_{2n+1} - a| < \varepsilon \end{cases}$ d'où les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et

$lim\, u_{2n} = lim\, u_{2n+1} = a$

Réciproquement

Soit $\varepsilon > 0$, $lim\, u_{2n} = a \Rightarrow il$ il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p_1 \Rightarrow |u_{2n} - a| < \varepsilon$

et $lim\, u_{2n+1} = a \Rightarrow il$ il existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - a| < \varepsilon$

Posons $p = sup(2p_1, 2p_2 + 1)$.

Soit $m \in I$, deux cas peuvent se présenter

- $m = 2n$

  $m \geq p \Rightarrow n \geq p_1 \Rightarrow |u_{2n} - a| = |u_m - a| < \varepsilon$

- $m = 2n + 1$

  $m \geq p \Rightarrow n \geq p_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - a| = |u_m - a| < \varepsilon$

Dans le cas où a est infini, la démonstration se fait presque de la même façon.

Exercice

Etudier la convergence de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = (-1)^n$ b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ c) $u_n = \dfrac{1}{n} cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Solution

a) $\begin{cases} u_{2n} = 1 \\ u_{2n+1} = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} lim\, u_{2n} = 1 \\ lim\, u_{2n+1} = -1 \end{cases}$

$lim\, u_{2n} \neq lim\, u_{2n+1} \Rightarrow$ la suite (u_n) n'a pas de limite donc elle est divergente.

b) $\begin{cases} u_{2n} = \dfrac{1}{n} \\ u_{2n+1} = \dfrac{-1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} lim\, u_{2n} = 0 \\ lim\, u_{2n+1} = 0 \end{cases}$ et comme les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

convergent vers la même limite 0 donc la suite (u_n) converge vers 0.

c) Posons $v_n = u_{2n} = \dfrac{1}{2n}\cos(n\pi)$ et $w_n = u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} cos\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$x_n = v_{2n} = \dfrac{1}{4n} cos(2n\pi) = \dfrac{1}{4n}$ et $y_n = v_{2n+1} = \dfrac{1}{2(2n+1)} cos((2n+1)\pi) = \dfrac{-1}{4n+2}$

Il est évident que chacune des suites (x_n) et (y_n) converge vers 0, donc la suite (v_n) converge vers 0.
Les suites (v_n) et (w_n) convergent vers 0, donc la suite (u_n) converge vers 0.

5. Suites bornées et convergence

Théorème 3

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel l.
$lim\, u_n = l$ donc il existe un entier naturel p tel que, $n \in I$ et $n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < 1$
Autrement dit, $\forall n \geq p,\ u_n \in \left]l-1, l+1\right[$.
On pose $m = inf\left\{l-1, u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{p-1}\right\}$ et $M = sup\left\{l+1, u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{p-1}\right\}$
Soit $n \in I$.
Si $n \geq p$ alors $m \leq l-1 < u_n < l+1 \leq M$
Si $n_0 \leq n < p$ alors $u_n \in \left\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{p-1}\right\}$ donc $m \leq u_n \leq M$

Remarque

Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.
Exemple : $u_n = (-1)^n$

II. Limites et ordre

Théorème 4

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel l.
S'il existe $p \in I$ tel que, pour tout entier $n \geq p,\ u_n \geq 0$ (resp $u_n \leq 0$) alors $l \geq 0$ (resp $l \leq 0$)

Démonstration

Supposons que $l < 0$.
On a $lim\, u_n = l$ donc $pour\ \varepsilon = \dfrac{-l}{2} > 0$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in I$, $n \geq q \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.
$|u_n - l| < \dfrac{-l}{2} \Leftrightarrow \dfrac{l}{2} < u_n - l < \dfrac{-l}{2} \Rightarrow < u_n < \dfrac{l}{2} < 0$ ce qui est impossible si on choisit $n \geq sup(p, q)$.
On appliquant ce résultat à la suite $-u$, on montre que si $u_n \leq 0$ à partir d'un certain rang alors $l \leq 0$.

⚠	$u_n > 0$ à partir d'un certain rang $\not\Rightarrow$ $l > 0$. On peut avoir $u_n > 0$ pour tout $n \in I$ et $l = 0$. Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Conséquences

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers deux réels l et l'.
Si on a $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors $l \leq l'$

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel l et a et b deux réels.
Si $u_n \in [a, b]$ à partir d'un certain rang alors $l \in [a, b]$

⚠ Ce résultat n'est pas toujours vrai si on remplace l'intervalle fermé $[a, b]$ par l'intervalle ouvert $]a, b[$

⚠	$u_n < v_n$ à partir d'un certain rang $\not\Rightarrow$ $l < l'$. On peut avoir $u_n < v_n$ pour tout $n \in I$ et $l = l'$. Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n+2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$

Théorème 5 (théorème des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles définies sur I et l un réel.

Si on a : $\begin{cases} \text{Il existe p} \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout entier } n \geq p,\ u_n \leq w_n \leq v_n \\ \lim u_n = \lim v_n = l \end{cases}$

Alors $\lim w_n = l$

Démonstration

Pour tout $n \in I$ posons $x_n = w_n - u_n$ et $y_n = v_n - u_n$

On a : $\forall n \in I,\ 0 \leq x_n \leq y_n$

Soit $\varepsilon > 0$.

La suite (y_n) est convergente et $\lim y_n = l - l = 0 \Rightarrow$ Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I,\ n \geq p \Rightarrow |y_n| = y_n < \varepsilon$.

Donc pour $n \in I$ et $n \geq p$ on a : $0 \leq x_n \leq y_n < \varepsilon$

On a alors : **$\forall \varepsilon > 0$ il existe $p \in I$ tel que $\forall n \in I,\ n \geq p \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$**

Donc la suite (x_n) converge vers 0

Et puisqu'on a $w_n = x_n + u_n$ pour tout $n \in I$ alors la suite (w_n) est convergente (comme somme de deux suites convergentes) et $\lim w_n = l$.

Conséquence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies sur I.
$|u_n| \le v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = 0$ $\qquad \lim u_n = 0$

Exemple 1

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$

Montrer que $\lim u_n = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| = \left|\dfrac{\cos n}{n}\right| = \dfrac{|\cos n|}{n} \le \dfrac{1}{n}$ car pour tout réel x, $|\cos x| \le 1$

On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, & |u_n| \le \dfrac{1}{n} \\ \lim \dfrac{1}{n} = 0 \end{cases}$ donc $\lim u_n = 0$.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{n - \sin n}{2n + (-1)^n}$

Etudions la convergence de cette suite.

Pour tout entier naturel n supérieur à 1 on a :

$$-1 \le -\sin n \le 1 \Rightarrow 0 \le n - 1 \le n - \sin n \le n + 1$$

Pour tout entier naturel n supérieur à 1 on a :

$$-1 \le (-1)^n \le 1 \Rightarrow 0 < 2n - 1 \le 2n + (-1)^n \le 2n + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+1} \le \frac{1}{2n + (-1)^n} \le \frac{1}{2n-1}$$

Ainsi pour $n \ge 1$ on a: $\begin{cases} 0 \le n - 1 \le n - \sin n \le n + 1 \\ 0 < \dfrac{1}{2n+1} \le \dfrac{1}{2n+(-1)^n} \le \dfrac{1}{2n-1} \end{cases}$

En multipliant ces deux encadrements, membre à membre on trouve

$\dfrac{n-1}{2n+1} \le u_n \le \dfrac{n+1}{2n-1}$

En plus $\lim \dfrac{n-1}{2n+1} = \lim \dfrac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim \dfrac{n+1}{2n-1} = \lim \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$

Donc d'après le théorème des gendarmes on peut conclure que la suite (u_n) est convergente et $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exemple 3

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$

Etudions la convergence de cette suite.

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier $k \in \{1, 2, ..., n\}$ on a :

$$n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ (somme des n encadrements membre à membre) j'espère que c'est clair !

Il semble que les extrémités du dernier encadrement ont la même limite, vérifions alors ça.

$$\lim \frac{n^2}{n^2+n} = \lim \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim \frac{n^2}{n^2+1} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

On a alors $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1} \\ \lim \frac{n^2}{n^2+n} = \lim \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \end{cases}$

Donc d'après le théorème des gendarmes la suite (u_n) est convergente et $\lim u_n = 1$

Théorème 6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies sur I.

- S'il existe $q \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in I$ et $n \geq q$, $u_n \leq v_n$ et $\lim u_n = +\infty$ **alors** $\lim v_n = +\infty$
- S'il existe $q \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in I$ et $n \geq q$, $u_n \leq v_n$ et $\lim v_n = -\infty$ **alors** $\lim u_n = -\infty$

Démonstration

- Soit $A > 0$, montrons qu'il existe un entier naturel m tel que $\forall n \in I$, $n \geq m \Rightarrow v_n > A$.
  On a $\lim u_n = +\infty \Rightarrow$ il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in I$, $n \geq p \Rightarrow u_n > A$
  Posons $m = sup(p,q)$ et soit $n \in I$. $n \geq m \Rightarrow v_n \geq u_n > A$
  Donc $\lim v_n = +\infty$.
- Pour $n \geq q$ on a $-v_n \leq -u_n$ en plus $\lim(-v_n) = +\infty \Rightarrow \lim(-u_n) = +\infty$
  Donc $\lim u_n = -\infty$

Exercice

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

2) En déduire que $\lim\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$

Solution

1) On a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$n+1>n \Leftrightarrow \sqrt{n+1}>\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

2) On a : $\forall k\in\{1,2,....,n\}\ \sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

Faisant la somme membre à membre

$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$ ou encore

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+....+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\dfrac{1}{2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+....+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Ce qui donne après simplification $\sqrt{n+1}-1<\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+....+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

D'où $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+....+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$ et puisqu'on a $\lim(2\sqrt{n+1}-2)=+\infty$

alors $\lim\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+....+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$.

III. Suites de type $v_n=f(u_n)$

Théorème 7

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert J de centre a et (u_n) une suite à valeurs dans J.
Si (u_n) converge vers a et f continue en a **alors** la suite $f(u_n)$ converge vers $f(a)$

Démonstration

Soit $\varepsilon>0$.
Montrons qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\in I,\ n\geq p\Rightarrow|f(u_n)-f(a)|<\varepsilon$
On a :
f continue en a $\Rightarrow$ il existe $\alpha>0$ tel que $\forall x\in J,\ |x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$
(u_n) converge vers a donc il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\in I,\ n\geq p\Rightarrow|u_n-a|<\alpha$
Donc pour $n\in I$ et $n\geq p$ on a $u_n\in J$ et $|u_n-a|<\alpha$ ce qui permet d'écrire
$|f(u_n)-f(a)|<\varepsilon$ cqfd

Exercice

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n

par : $u_n = n^2\left(1 - cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Déterminer $lim\, u_n$

Solution

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - cos\, x}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} & \end{cases}$

Il est évident que $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ pour tout entier naturel n non nul.

Puisque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ (Résultat de cours) alors f est continue en 0

En plus $lim \frac{1}{n} = 0$ donc la suite (u_n) converge vers *f(0)*=1.

Théorème 8

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert J de centre l sauf peut être en l et (u_n) une suite à valeurs dans $J \setminus \{l\}$.

Si $lim\, u_n = l$ et $\lim\limits_{x \to l} f(x) = L\ (L \in \mathbb{R})$ alors $lim\left(f(u_n)\right) = L$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \in I,\ \left(n \geq p \Rightarrow |f(u_n) - L| < \varepsilon\right)$. On a $\lim\limits_{x \to l} f(x) = L$ donc

$il\ existe\ \alpha > 0\ tel\ que\ \forall x \in J,\ 0 < |x - l| < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ **(1)**

Puisque $lim\, u_n = l$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in I,\ \left(n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \alpha\right)$

Alors pour $n \geq p$ on a $|u_n - l| < \alpha$ et on a aussi par hypothèse $u_n \in J \setminus \{l\}$

Ce qui permet d'écrire $0 < |u_n - l| < \alpha$ pour $n \geq p$.

Et d'après **(1)**, on obtient $|f(u_n) - L| < \varepsilon$. En conclusion

$\forall \varepsilon > 0, il\ existe\ p \in \mathbb{N}\ tel\ que\ \forall n \in I,\ \left(n \geq p \Rightarrow |f(u_n) - L| < \varepsilon\right)$

D'où $lim\, f(u_n) = L$

Remarque

Le théorème précédent reste valable si l ou L est infinie

Conséquence

Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = l$

Exemples

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - x + 1 = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty \Rightarrow \lim 3n^2 - n + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\sin X}{X} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

IV. Convergence des suites monotones

Théorème 9(Admis) (utile pour justifier la convergence)

Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors elle est convergente et elle converge vers un réel l vérifiant $u_n \le l$ à partir d'un certain rang.

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée est convergente et elle converge vers un réel l vérifiant $u_n \ge l$ à partir d'un certain rang.

Théorème 10

Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Démonstration

❖ Soit $A > 0$, montrons que $u_n > A$ à partir d'un certain rang.

(u_n) n'est pas majorée donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > A$

Or la suite (u_n) est croissante donc pour tout entier

$n \in I,\ n \ge p \Rightarrow u_n \ge u_p > A$

❖ Soit $A < 0$, montrons que $u_n < A$ à partir d'un certain rang.

(u_n) n'est pas minorée donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p < A$

Or la suite (u_n) est décroissante $\forall n \in I,\ n \ge p \Rightarrow u_n \le u_p < A$

Théorème 11 (utile pour le calcul de la limite si elle existe)

Soit f une fonction continue sur un intervalle J et (u_n) une suite à valeurs dans J qui converge vers un réel l.

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et $l \in J$ alors $f(l)=l$

Démonstration

On a $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$

Et comme f est continue en l alors $\lim f(u_n) = \lim u_{n+1} = f(l)$

Donc d'après l'unicité de la limite on a $f(l)=l$.

Exercice

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \le u_n \le 2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Solution

1) On procède par récurrence

Pour n=0 , l'encadrement est vrai car $u_0 = 1 \in [1,2]$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \le u_n \le 2$ et montrons que $1 \le u_{n+1} \le 2$.

$1 \le u_n \le 2 \Leftrightarrow 3 \le 2+u_n \le 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} \le \sqrt{2+u_n} \le \sqrt{4} = 2 \Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le 2$

2) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \dfrac{2+u_n - u_n{}^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n} = \dfrac{(u_n - 2)(-u_n - 1)}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$

Et d'après 1) $1 \le u_n \le 2 \Rightarrow u_n - 2 \le 0,\quad -u_n - 1 < 0$ et $\sqrt{2+u_n} + u_n > 0$

Ce qui prouve bien que $u_{n+1} - u_n \ge 0$ et la suite (u_n) est croissante.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 2) donc elle est convergente

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f : x \mapsto \sqrt{2+x} \\ (u_n) \text{ converge vers } l \\ f \text{ continue sur } [-2,+\infty[\text{ et en particulier sur } [1,2] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,2] \text{ donc } l \in [1,2] \end{cases}$$

Donc $f(l) = l$

$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{2+l} = l \Leftrightarrow l^2 = 2+l \text{ et } l \ge 0 \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \text{ et } l \ge 0$

la solution positive de l'équation $l^2 - l - 2 = 0$ est 2 donc $\lim u_n = 2$.

IV. Suites adjacentes

Définition

On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- Pour tout entier $n \in I,\ u_n \le v_n$
- (u_n) croissante et (v_n) décroissante
- $\lim(v_n - u_n) = 0$

Théorème

Si deux suites réelles sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Démonstration

(u_n) est croissante donc $u_{n_0} \leq u_n$ et $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$ $(n \in I)$

Donc $\forall n \in I,\ u_{n_0} \leq v_n$ c.-à-d. (v_n) est minorée par u_{n_0}

Et puisque (v_n) est minorée et décroissante alors elle est convergente

(v_n) est décroissante donc $v_n \leq v_{n_0}$ et $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$ $(n \in I)$

Donc $\forall n \in I,\ u_n \leq v_{n_0}$ c.-à-d. (u_n) est majorée par v_{n_0}

Et puisque (u_n) est croissante et majorée alors elle est convergente

En plus on a $lim(v_n - u_n) = 0$ donc $lim\, u_n = lim\, v_n$

Exercice

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $w_n = u_n - v_n$.

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique

b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq v_n$.

2) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite l .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) Montrer que (t_n) est une suite constante.

b) En déduire la valeur de l.

Solution

1) a) $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = \dfrac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} = \dfrac{u_n - v_n}{12} = \dfrac{1}{12} w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$ et de premier terme $w_0 = 11$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0 q^n = 11\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geq 0$ donc $u_n \geq v_n$.

2)

- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \dfrac{-2u_n + 2v_n}{3} = -\dfrac{2}{3}(u_n - v_n) = -\dfrac{2}{3} w_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.
- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) = \dfrac{1}{4} w_n \geq 0$ donc la suite (v_n) est croissante.
- (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12} \in]-1,1[$ donc $lim\, w_n = lim(u_n - v_n) = 0$.

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n \\ (v_n) \text{ croissante et } (u_n) \text{ décroissante} \\ lim(u_n - v_n) = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}$$

Ces deux suites sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite l

3) a) $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) = 3u_n + 8v_n = t_n$

Donc (t_n) est une suite constante.

b) (t_n) est constante donc $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 3u_n + 8v_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$.

Par passage à la limite on trouve $11l = 44$ donc $l = \dfrac{44}{11} = 4$.