Thèmes
Dérivabilité
Bijection
Fonction réciproque

Série d'exercices

Classe : $4^{\text{ème}}$ ScExp

Professeur
Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.
Sans calculer $f'(x)$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet trois solutions réelles distinctes.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Etudier les variations de g et tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique β dans $]1,2[$.

3) a) Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$; $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout $x \in [1,+\infty[$; $|f(x) - \beta| \leq \dfrac{1}{2}|x - \beta|$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -3x$.

2) Donner les coordonnées de chacun des point s de contact et écrire une équation de chacunes des tangentes en ces points.

Exercice 4

Montrer les inégalités suivantes :

a) $|\sin x| \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$ b) $x \leq \tan x$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ c) $1 - x \leq \cos x \leq 1 + x$; $x \in \mathbb{R}_+$

Exercice 5

Soit f la fonction $x \mapsto \tan x$.

1) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$; $1 \leq f'(x) \leq 2$.

2) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$; $x \leq \tan x \leq 2x$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $|f'(x)| \le \dfrac{1}{2}$.

2) En déduire que pour tout réel positif x, $1 - \dfrac{x}{2} \le \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \le 1 + \dfrac{x}{2}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) a) Montrer que le domaine de définition de f est $D_f =]-1,1[$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

d) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1,1[$ une solution unique α.

b) Vérifier que $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

c) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ on a : $|f'(x)| \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

d) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ on a : $|f(x) - \alpha| \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9}|x - \alpha|$.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(4 - u_n^{\,2}\right)$.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(4 - x^2\right)$.

a) Etudier les variations de f.

En déduire que $f([0,1]) \subset [0,1]$ et $f(]4,+\infty[) \subset]4,+\infty[$.

b) Déterminer les réels x tels que $f(x) = x$. (appelés points fixes de f)

c) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \le \dfrac{2}{5}$.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \le \dfrac{2}{5}|u_n - 1|$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \le \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

2) Drésser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

   b) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

4) On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[-1, +\infty[$.

   a) Montrer que g réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$.

   b) Montrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$, $g^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x^2 - 4}$.

   c) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de g^{-1}.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) a) Calculer $f\left(\sqrt{2}\right)$ puis $f^{-1}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

   b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

   c) Retrouver alors $f^{-1}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x} - 1 - \dfrac{1}{x}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$

   b) Drésser le tableau de variation de f.

   c) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) On considère l'équation (E) : $2\sqrt{x} - 3 - \dfrac{1}{x} = 0$

   a) Montrer que (E) admet une solution unique α et que $\alpha \in]2, 3[$.

   b) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe (C) de f au point d'abscisse α.

4) a) Justifier que la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur l'intervalle J.

   b) Calculer $f(1)$ et déduire $(f^{-1})'(0)$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

a) Déterminer : le sens de variation de f^{-1} sur J ; $\lim\limits_{+\infty} f^{-1}$ et $f^{-1}(2)$.

b) Calculer $f(3)$ et puis $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{5}+3\right)$.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = 1 - \sin x$

1°) Etudier les variations de la fonction f.

2°) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) définie sur l'intervalle $[0, 2]$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]0,2[$ et que pour tout $x \in]0, 2[$

on a : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x(2-x)}}$

c) La fonction f^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 et à gauche en 2 ?

3°) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f(x) - x$

a) Etudier les variations de g

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $0,5 < \alpha < 0,6$.

4°) On définit la fonction h sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = f^{-1}(1 + \sin x)$

a) Montrer que h est dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ et que $h'(x) = 1$

b) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $h(x) = x - \pi$

(on pourra déduire ce résultat de la question précedente).

Exercice14

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = 1 - tgx$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(1-\sqrt{3})$.

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x on a:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x^2 - 2x + 2}$$

4) *Soit la fonction* g *définie sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *par :* $g(x) = f(x) - x$

a) *Etudier les variations de* g .

b) *En déduire que l'équation* $f(x) = x$ *admet une solution unique* α

et que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

c) *Déterminer le signe de* $g(x)$ *pour* $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

5) *Soit la fonction* h *définie sur* þ *par :* $h(x) = f^{-1}(1-x) + f^{-1}(1+x)$.

a) *Montrer que* h *est dérivable sur* þ *et que pour tout réel* x *on a :* $h'(x) = 0$.

b)*Déduire alors que pour tout réel* x *on a :* $f^{-1}(1-x) + f^{-1}(1+x) = 0$