# Probabilité continue

## 1. Densité de probabilité

### Définition

*On appelle densité de probabilité sur un intervalle I toute fonction f continue et positive sur I telle que :*

- $\int_a^b f(x)dx = 1$ si $I=[a,b]$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$ si $I=[a,+\infty]$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt = 1$ si $I=[-\infty, a]$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt + \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)dt = 1$ si $I=\mathbb{R}$

**Exercice 1**

Soit $f$ une fonction constante sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$.

Déterminer sa valeur pour qu'elle soit une densité de probabilité sur $[a,b]$

**Solution**

Posons $f(x) = \lambda$ pour tout $x \in [a,b]$

$f$ est une densité de probabilité sur $[a,b]$ ssi $\int_b^a f(t)dt = 1$

$\int_a^b \lambda dt = 1 \Leftrightarrow \lambda(b-a) = 1 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{b-a}$ donc pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$

**Exercice 2**

Soit $\lambda$ un réel strictement positif et $f$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Montrer que $f$ est une densité de probabilité sur $[0,+\infty[$

**Solution**

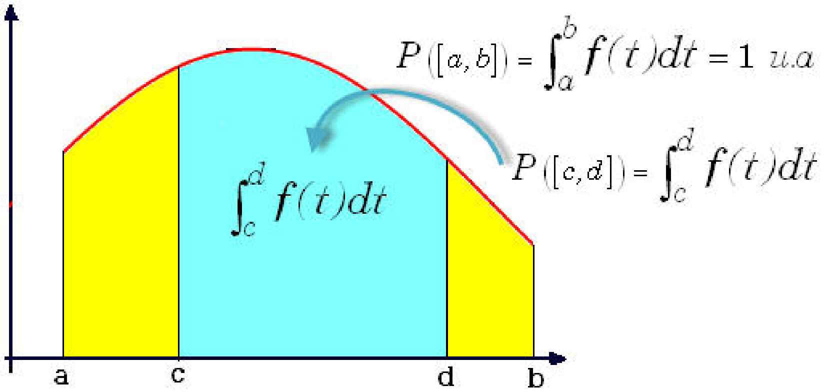
Soit $x \in [0,+\infty[$ ; $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda\left[-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$ cqfd

## 2. Loi de probabilité continue

### Définition

*Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I. L'application P qui, à tout sous-intervalle [c, d] de I associe $P([c,d]) = \int_c^d f(t)dt$ est appelée loi de probabilité sur I*




Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths

**Remarques**

- Pour tout $x_0$ de I on a : $P(\{x_0\}) = P([x_0, x_0]) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$

On dit que l'événement $\{x_0\}$ est « quasi-impossible »

Ainsi on a : $P([c,d]) = P([c,d[) = P(]c,d]) = P(]c,d[)$

- Si on note $\overline{[c,d]} = \{x \in I \text{ et } x \notin [c,d]\}$ :complémentaire de $[c,d]$ dans I ; on a :

  $P\left(\overline{[c,d]}\right) = 1 - P([c,d]) = 1 - \int_c^d f(t)dt$
- La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles

en particulier si J et K sont deux intervalles inclus dans I tels que $J \cap K = \emptyset$ alors $P(J \cup K) = P(J) + P(K)$

**Cas particuliers**

- Si *f* est une densité de probabilité constante sur un intervalle $[a,b]$ (a<b) (donc $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ voir exercice 1) on dit que P est la loi uniforme
- Si f est définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec ($\lambda > 0$) on dit que P est la loi exponentielle de paramètre $\lambda$

## 3. Variable aléatoire continue

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit alors que la variable est **continue**. On s'intéresse à des événements du type: «X est compris entre les réels a et b» soit «$a \le X \le b$».

***Exemples :*** le temps d'attente à un arrêt de bus, la durée de vie d'une machine, la distance du point d'impact au centre d'une cible circulaire etc.

***Définition*** **(*loi de probabilité d'une variable aléatoire continue*)**

*Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I de densité f.*
*On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans I, suit la loi de probabilité P lorsque pour tout sous-intervalle [c, d] de I, on a :*

$$P(c \le X \le d) = P([c,d]) = \int_c^d f(t)dt$$

## 4. Fonction de répartition

***Définition***

*Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans un intervalle I de la forme [a, b] (ou de la forme $[a, +\infty[$ ), qui suit une loi de probabilité P.*

*On appelle fonction de répartition de X, la fonction F définie pour tout x de I par :*
*F(x) = P(X≤x)*

Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths

**Conséquences**

- Si $I = [a,b]$ ou $I = [a,+\infty[$ alors $F(x) = P(X \le x) = P(a \le X \le x) = \int_a^x f(t)dt$
  donc $f$ est dérivable sur I et on a : $F' = f$
- F est croissante sur I (car f est une densité de probabilité sur I donc positive sur I)
- F(a)=0 ; F(b)=1 si $I = [a,b]$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ si $I = [a,+\infty[$
- Pour tout $x \in I;\ F(X > x) = 1 - F(x)$
- Pour tout intervalle $[c,d] \subset I;\ P(c < X \le d) = P(c \le X \le d) = F(d) - F(c)$

## 5. Loi uniforme

Si X est une variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ et si c et d sont deux réels tels que : $[c,d] \subset [a,b]$ alors on a :

$$\boxed{P(c \le X \le d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}dt = \frac{d-c}{b-a} = \frac{longueur\ de\ [c,d]}{longueur\ de\ [a,b]}}$$

Sa fonction de répartition F définie sur $[a,b]$ par :

$$\boxed{F(x) = P(X \le x) = P(a \le X \le x) = \frac{x-a}{b-a}}$$

**Exemple1**

On choisit un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0,1]$

Quelle est la probabilité d'avoir le premier chiffre après la virgule égal à 3 ?

**Réponse**

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre choisi dans l'intervalle $[0,1]$.

Comme le choix se fait au hasard dans $[0,1]$, on peut dire que X suit la loi uniforme sur cet intervalle et sa densité est la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = 1$

La probabilité d'avoir le premier chiffre après la virgule égal à 3 est alors le réel

$p = P(0,3 \le X < 0,4) = P(0,3 \le X \le 0,4) = \int_{0,3}^{0,4} 1dt = 0,1$

**Exemple 2**

Le bus passe toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7 heures et 7 heures 30. La variable aléatoire sera l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 30].

1. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le prochain bus ?
2. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?

**Réponses**

La variable aléatoire X est le temps uniformément réparti sur l'intervalle [0 ; 30].

--------- Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths ---------

donc sa densité est la fonction f définie sur $[0,30]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{30}$

1. L'attente n'est inférieure à cinq minutes que s'il arrive entre 7 h 10 et 7 h 15 ou entre 7 h 25 et 7 h 30. On a donc
$$P(10 \le X \le 15)+P(25 \le X \le 30)=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dt+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dt=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$
2. De même on a : $P(0 \le X \le 5)+P(15 \le X \le 20)=\dfrac{1}{3}$

## 6. Loi exponentielle

### Définition

*Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité P de densité la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(\lambda>0)$ *on dit que X suit la loi exponentielle de paramètre* $\lambda$ *( appelée aussi **loi de durée de vie sans vieillissement**).*

- Pour tous réels positifs a et b on a :
$$P(a \le X \le b)=\int_a^b \lambda e^{-\lambda t}dt=\lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_a^b=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$$
- La fonction F de répartition de X définie sur $[0,+\infty[$ $par$ : $F(x)=P(X \le t)=1-e^{-\lambda t}$ appelée aussi fonction de **défaillance** (c'est la probabilité qu'un appareil tombe en panne avant t années)
- Pour tous réels positifs t et s on a : $P(X>s+t\,/\,X>s)=P(X>t)$
C-à-d : si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique, la probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne plus que t années après sa mise en service (C'est la durée de vie sans vieillissement non ?)

**Exemple**

On suppose que la durée de vie $X$ d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.
a) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie
b) On sait qu'une voiture a durée déjà 10 ans.
Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
c) Calculer la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :

**Réponses**

a) $P(X>10)=1-P(X \le 10)=1-\int_0^{10}0,1e^{-0,1t}dt=e^{-1}$

b) $P(X>12\,/\,X>10)=\dfrac{P((X>12)\cap(X>10))}{P(X>10)}=\dfrac{P(X>12)}{P(X>10)}=\dfrac{e^{-0,1\times 12}}{e^{-0,1\times 10}}=e^{-0,2}$

**c)** $P(X>2)=e^{-0,1\times 2}=e^{-0,2}$

**Remarque** : La durée de vie de la voiture ne dépend pas de son âge

---------- Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths ----------