Nombres Complexes

Exercice N°1

Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$(2+3i)(-1+i)$; $(1+i)^2$; $(1+i)^{2010}$; $(1-i)^2$; $(1-i)^{2011}$; $\dfrac{2+i}{i}$; $\dfrac{1}{1-4i}$; $\dfrac{1+i}{1-i}$; $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^3$

Exercice N°2

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $5z+2i=(1+i)z-3$ 2) $\dfrac{z-i}{z+1}=4i$ 3) $2z+i\,\overline{z}=3$ 4) $z^2+z.\overline{z}=0$

5) $\begin{cases}3z_1+z_2=1-7i \\ iz_1+2z_2=11i\end{cases}$ 6) $(z^2+2)(z^2-4z+4)=0$

Exercice N°3

1) Dans le plan complexe ,construire les points images respectifs des nombres complexes :
$a=2-i$; $b=-3-i$ *et* $c=-2-4i$

2) Construire les images des nombres complexes : $\dfrac{b}{a}$ *et* $\dfrac{c}{a}$

Exercice N°4

On donne les nombres complexes : $z=1+i$ *et* $z'=3+4i$

Calculer le module des nombres complexes : $z.z'$; z^2 ; $z'^2 z^3$; $\dfrac{z}{z'}$; $\dfrac{z^4}{z'^3}$

Exercice N°5

A tout nombre complexe z , on associe le nombre complexe Z défini par :
$Z=\dfrac{z-1+2i}{z-i}$ avec $z\neq i$.

1) Donner la forme cartésienne de Z pour ,successivement : $z=1$, $z=1-i$
2) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que Z soit un réel .
3) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tel que Z soit imaginaire .
4) Déterminer l'ensemble G des points M d'affixe z tel que Ré(Z)=1.

Exercice N°6

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives : $z_A=-1-5i$, $z_B=4-3i$, $z_C=3+3i$ *et* $z_D=-2+i$

1) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD
2) Déterminer l'affixe du point C' , symétrique du point C par rapport à D.
3) Déterminer l'affixe du point A' vérifiant : $\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$
4) Quelle est la nature du quadrilatère A'BC'D ?

Exercice N°7

Déterminer et représenter dans chaque cas ,l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation donnée :

1) $|z-3|=|z-3i|$ 2) $|2-3i+z|=|2+3i|$ 3) $|\overline{z}-4+i|=1$ 4) $\left|\dfrac{3iz-12}{z+i+1}\right|=3$

Exercice N°8

1) Soient z_1 *et* z_2 deux nombres complexes de modules 1 et tels que $1+z_1z_2\neq 0$.

Montrer que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel

2) Soient a et b deux nombres complexes .Montrer que $|a-b|=|1-\overline{a}b|$ *si et seulement si* $|a|=1$ *ou* $|b|=1$

Exercice N°9

Soit $P(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1$

1) Calculer $P(1+i)$
2) Comparer $P(\overline{z})$ et $\overline{P(z)}$
3) Montrer que si α est racine de P , alors $\overline{\alpha}$ est racine de P
4) Montrer que si α est racine de P , $\frac{1}{\alpha}$ est racine de P.
5) Déterminer toutes les racines de P.

Exercice N°10

Soit $z_1=4+4i$ et $z_2=1-i\sqrt{3}$

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

z_1 , z_2 , $z_1^{\,2}$, z_1z_2 , $z_1^{\,3}$, $\frac{z1}{z_2}$

Exercice N°11

Soit $z=1+i\sqrt{3}$

1) Mettre le nombre complexe z sous forme trigonométrique .
2) En déduire la forme algébrique du nombre complexe $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$

Exercice N°12

1) Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes : $z_1=-1-i$; $z_2=-1+i\sqrt{3}$ et $Z=\frac{z_1}{z_2}$
2) Déterminer la forme algébrique de Z
3) En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice N°13

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

A , B et C les points d'affixes $z_A=i$, $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ et $z_C=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

1) a) Placer les points A , B et C dans le repère .
   b) Montrer que A , B et C appartiennent à un meme cercle (C) que l'on précisera .
   c) Montrer que OABC est un losange .
2) Soit $z_1=-i\,z_B$. On désigne par z_1 l'affixe du point A_1.

   On considère les points A_n d'affixes $z_n=(z_1)^n$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et le point A_0 d'affixe 1.

   a) Calculer z_2 et placer les points A_0 , A_1 et A_2 dans le meme repère .
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a A_n appartient au cercle C(o,1)
   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $z_{n+1}-z_n=(z_1)^n\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$
   d) En déduire le module de $z_{n+1}-z_n$ et la distance A_nA_{n+1}
   e) Montrer alors que OA_nA_{n+1} est un triangle équilatéral.