Devoir de controle n°1 **Classe:** $4^{ième}$Sc2 **Date:** 1/11/2008

EPREUVE: Mathematiques **Durée:** 2H **Prof:** Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

Répondre par vrai ou faux (aucune justification n'est demandée)

1°)On considère le nombre complexe : $Z = -\frac{\sqrt{2}}{1-i} e^{\frac{i\pi}{3}}$

a. On a : $|Z| = 1$

b. On a : $\overline{Z} = \frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{\frac{4i\pi}{3}}$

c. On a : $\arg(Z) \equiv \frac{5\pi}{12} \quad [2\pi]$

2°) La suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est monotone

3°) Toute monotone et bornée est convergente

4°) Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0

5°) La somme de deux suites divergentes est une suite divergente

Exercice n°2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

1°) Pour tout entier naturel non nul n , on pose $v_n = \frac{1}{n} u_n$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

b) Exprimer v_n en fonction de n et déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = \frac{n}{2^n}$

2°)a) En remarquant que pour

$n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2 = n^2\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$; montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$ on a $n^2 \leq 2^n$

b)Déduire alors que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice n°3

On considère les nombres complexes suivants :

$a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = e^{i\frac{\pi}{4}}$

1°) Ecrire a et b sous forme algébrique

2°) On pose $w = \frac{a}{b}$

a) Ecrire w sous formes algébrique et trigonométrique

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice n°4

Pour tout nombre complexe z on pose $P(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i$

1°) a) Vérifier que $z_1=2i$ est une solution de l'équation $P(z)=0$

b) Montrer que pour tout nombre complexe z , $P(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

2°) a) Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation $P(z)=0$

z_2 étant la solution dont la partie imaginaire est positive

b) Ecrire les solutions z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle

3°) Placer dans le plan complexe et avec précision les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 et démontrer qu'ils sont sur un même cercle

4°) Quelle est la nature du quadrilatère OABC ?