Devoir de Maison n°1 **Classes : 2-ième sciences**

Objectifs évalués

- Résoudre des problèmes d'alignement ou de concours en utilisant la notion du barycentre
- Résoudre une équation se ramenant à une équation du second degré à une inconnue.
- Déterminer le signe d'un trinôme du second degré.
- Résoudre une inéquation se ramenant à une inéquation du second degré à une inconnue
- Reconnaître un zéro d'un polynôme.
- Factoriser un polynôme connaissant un ou plusieurs de ses racines
- Déterminer le signe d'une expression algébrique

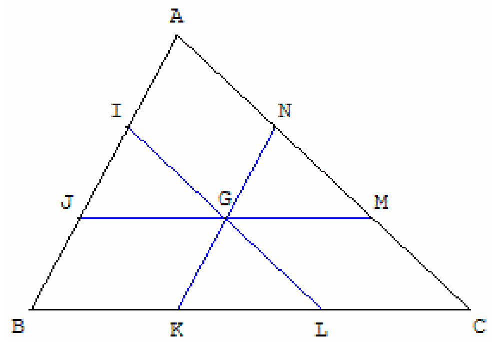
Exercice n°1

Chacun des côtés d'un triangle ABC est partagé en trois segments de même longueur grâce aux points : I et J sur [AB], K et L sur [BC], M et N sur [CA].

Soit G le centre de gravité du triangle ABC

1°)Montrer que G est le milieu du segment $[IL]$

2°)Démontrer que les droites (IL), (JM) et (KN) sont concourantes.



Exercice n°2

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, placer les points

$A(2,1)$,$B(-1,5)$,$C(5,7)$ et $D(1,\frac{5}{2})$

1°) Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre I des points B et C

2°) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC

3°) Existe-t-il un réel k pour lequel D est le barycentre de (A,1) et (B,k) ? Justifier

Exercice n°3

On considère le polynome définie par : $P(x) = 5x^3 - 11x^2 - 2x + 8$

Vérifier que 2 est une racine de P

Factoriser P et résoudre l'équation P(x)=0

Exercice n°4

On donne la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 11x^2 - 7x - 20}{x^2 - 2x - 3}$

1°) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2°) Factoriser le numérateur et le dénominateur de f , puis simplifier $f(x)$
3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'inéquation $f(x) \geq 0$

Correction du devoir

Exercice n°1

1°) On a $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ donc I=bar$\{(A,2);(B,1)\}$

De la même façon on montre que L=bar$\{(B,1);(C,2)\}$

On rappelle le résultat du cours suivant :

Si G =bar{(A,a) ; (B,b)} alors pour tout point M du plan , $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$

Ce qui donne, en prenant M=G, a=2 et b=1 ; $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GL}$

Or G est le centre de gravité du triangle ABC signifie

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GI} + 3\overrightarrow{GL} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GL}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GL} = \vec{0}$

D'où G est le milieu du segment $[IL]$

2°) De la même façon on a : $J = bar\{(A,1);(B,2)\}$ et $M = bar\{(A,1);(C,2)\}$

$2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{GM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$ donc G est le milieu du segment $[JM]$

On montre aussi, en suivant la même méthode, que G est le milieu du segment $[NK]$

Conclusion : Les trois segments $[IL]$, $[JM]$ et $[NK]$ se coupent en leurs milieux
Donc les droites (IL), (JM) et (NK) sont concourantes

Exercice n°2

1°) I isobarycentre des points B et C I milieu du segment $[BC]$ ($\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$)

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{5+7}{2} = 6 \end{cases} \qquad I\ (2,6)$$

2°) G centre de gravité du triangle

ABC $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{1}{3}(x_A + x_B + x_c) = \dfrac{1}{3}(2-1+5) = 2 \\ y_G = \dfrac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = \dfrac{1}{3}(1+5+7) = \dfrac{13}{3} \end{cases}$

3°) On a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}\begin{pmatrix} 2 \\ -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$

Exercice n°3

P(2)=40-44-4+8=48-48=0 donc 2 est une racine de P

Pour tout réel x ,

$P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c des réels avec a non a nul

Ce qui donne P(x)=a$x^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

Par identification des coefficients on obtient $\begin{cases} a = 5 \\ b - 2a = -11 \\ c - 2b = -2 \\ -2c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -11 + 10 = -1 \\ c = -4 \\ c - 2b = -4 + 2 = -2 \text{ vrai} \end{cases}$

Donc pour tout réel x on a : $P(x) = (x-2)(5x^2 - x - 4)$

Dans le trinôme $5x^2 - x - 4$ on remarque que $5 + (-1) + (-4) = 0$ donc ses racines sont 1 et -4

D'où pour tout réel x on a : $P(x) = (x-2)(x-1)(x+4)$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -4$$

$Donc\ \ S_{\mathbb{R}} = \{2, 1, -4\}$

Exercice n°4

1°) $f(x)$ existe ssi $x^2 - 2x - 3 \neq 0$

On a : $a - b + c = 1 - (-2) + (-3) = 0$ donc les racines sont : -1 et $-\frac{c}{a} = 3$

Alors le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

2°) Posons $P(x) = -2x^3 + 11x^2 - 7x - 20$

Pour $x = -1$ on a : $-2(-1) + 11 + 7 - 20 = 20 - 20 = 0$ donc -1 est une racine de P

Et par suite P est factorisable par x+1

$P(x) = (x+1)Q(x)$ avec d°Q=2 $\Rightarrow$ $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$, $a \neq 0$

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c \\ &= ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c \text{ , pour tout réel } x \end{aligned}$$

Par identification on obtient $\begin{cases} a = -2 \\ b + a = 11 \\ c + b = -7 \\ c = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 11 - a = 13 \\ c = -20 \\ c + b = -20 + 13 = -7 \quad \text{vrai} \end{cases}$

D'où pour tout réel x on a : $P(x) = (x+1)(-2x^2 + 13x - 20)$

Pour le trinôme $-2x^2 + 13x - 20$ on a : $\Delta = 169 - 160 = 9 > 0$ donc les racines sont

$x' = \frac{-13-3}{-4} = 4$ et $x'' = \frac{-13+3}{-4} = \frac{5}{2}$

Alors $P(x) = (x+1)\left[-2(x-4)(x-\frac{5}{2})\right] = (x+1)(x-4)(-2x+5)$

Finalement on a : $f(x) = \frac{(x+1)(x-4)(-2x+5)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x-4)(-2x+5)}{x-3}$

3°)

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$-2x^2+13x-20$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -1[\cup \left]-1, \frac{5}{2}\right] \cup]3, 4]$