Lycée de Sbeïtla Devoir de Synthèse N°3 Le 28/05/2007	Prof : M- Taoufik Section : 3ème M2 Epreuve : Mathématiques Durée : 3heures

Exercice 1 (5 points)

Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges numérotées 1 , 1 , 2 et 4 boules vertes numérotées 1 ,1 , 2 , 2.

1) Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

a- Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

A « Obtenir trois boules qui portent le même numéro »

B « Obtenir, une seule boule rouge parmi les trois boules tirées »

b- Montrer que $p(A\cap B)=\frac{3}{35}$ **et déduire** $p(A\cup B)$

2) Une épreuve consiste à tirer au hasard une boule de l'urne.

a- Calculer la probabilité de tirer une boule verte.

b- Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.

c- On répète l'expérience précédente deux fois sans remettre la boule tirée dans l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

G « Obtenir une boule verte au premier tirage »

S « Obtenir au moins une boule rouge »

Exercice 2 (6 points)

Dans l'espace ξ, rapporté d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$**, on considère les points:**

A(1,1,-2) , B(1, 2,-2) et C(0,1,1) et les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ **et** $\vec{v}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

1) Montrer que les droites $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ **et** $\mathcal{D}'(B,\vec{v})$ **sont orthogonales.**

2) Montrer que les droites $\mathcal{D}$ **et** $\mathcal{D}'$ **ne sont pas coplanaires.**

3) Soient le plan $\mathcal{P}$ $(A,\vec{u},\vec{v})$ **et le point M(x,y,z) de ξ.**

a- Montrer que $\text{dét}\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)=6x+3y-6z-21$.

b- En déduire qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ **est** $2x+y-2z-7=0$

4) a- Montrer que les points A, B et C déterminent un plan Q.

b- Montrer qu'une équation cartésienne de Q est $3x+z-1=0$.

c- Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point I(2,1,-1) sur le plan Q.

5) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ **et Q sont sécants puis donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.**

6) On considère l'ensemble $S=\left\{M(x,y,z)\in\xi\,/\,x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0\right\}$.

a- Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon 3.

b- Calculer la distance $d(I,Q)$.

c- En déduire que l'intersection de S et Q est un cercle (ζ **) d'ont on précisera le centre et le rayon.**

Exercice 3(2 points)

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=(\sin x)^2$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que $f'(x)=\sin 2x$, puis dresser le tableau de variation de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Construire la restriction de la courbe de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 4(7 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$.

1) a- Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3}$

b- En déduire que pour tout $x\geq 3$ on a: $f(x)\geq\frac{9}{8}$.

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_n=f(n)$, $n\geq 3$

a- Vérifier que $\frac{9}{8}\leq v_n<2$.

b- Etudier la monotonie de la suite (v_n)

c- Déterminer la limite de la suite (v_n) quand n tends vers $+\infty$.

3) Soit la suite (u_n) définie par $u_n=\frac{n^2}{2^n}$, $n\geq 3$

a- Vérifier que pour tout $n\geq 3$ on a $\frac{u_n}{u_{n+1}}=v_n$.

b- En déduire que la suite (u_n)est décroissante (utiliser 2) a-)

4) a- Montrer que pour tout $n\geq 3$, $u_{n+1}\leq\frac{8}{9}u_n$.

b- Montrer alors que pour tout $n\geq 3$, $u_n\leq\frac{9}{8}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-3}$.

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-3}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Bon travail