

# Devoir de synthèse N°2

EPREUVE : Mathématiques

LYCÉE: *Bechri* A.S: 2011/2012 DURÉE: 3H PROF: *Lahmadi Adel* CLASSE: 4 Sc-Exp 2

## EXERCICE N°1

( 3 points )

Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chacune des propositions suivantes.  
Une justification est demandée.

- ❶  $\int_{-1}^1 |x|^{2011} dx = 0$
- ❷ Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[0,1]$ . Si  $f \leq 1$  alors  $\int_0^1 f(x) dx \leq 1$
- ❸ Si  $F$  est une primitive d'une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  alors la fonction  $x \mapsto F(2x)$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto f(2x)$ .
- ❹ Toute fonction affine de coefficient directeur non nul réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

## EXERCICE N°2

( 6.5 points )

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère:

- ♦ Les points  $A(1,1,1)$  et  $B(3,2,0)$
  - ♦ Le plan  $P$  passant par le point  $B$  et de vecteur normal  $\overline{AB}$ .
  - ♦ Le plan  $Q$  d'équation :  $x - y + 2z + 4 = 0$ .
  - ♦ La sphère  $S$  de centre  $A$  et de rayon  $AB$ .
- ❶ Montrer qu'une équation cartésienne du plan  $P$  est :  $2x + y - z - 8 = 0$
  - ❷ Déterminer une équation de la sphère  $S$ .
  - ❸ a) Calculer la distance du point  $A$  au plan  $Q$ . En déduire que le plan  $Q$  est tangent à la sphère  $S$ .  
b) Le plan  $P$  est-il tangent à la sphère  $S$  ?
  - ❹ On admet que le projeté orthogonal de  $A$  sur le plan  $Q$ , noté  $C$ , a pour coordonnées  $(0, 2, -1)$ .  
a) Prouver que les plans  $P$  et  $Q$  sont sécants.  
b) Soit  $\Delta$  la droite d'intersection des plans  $P$  et  $Q$ .

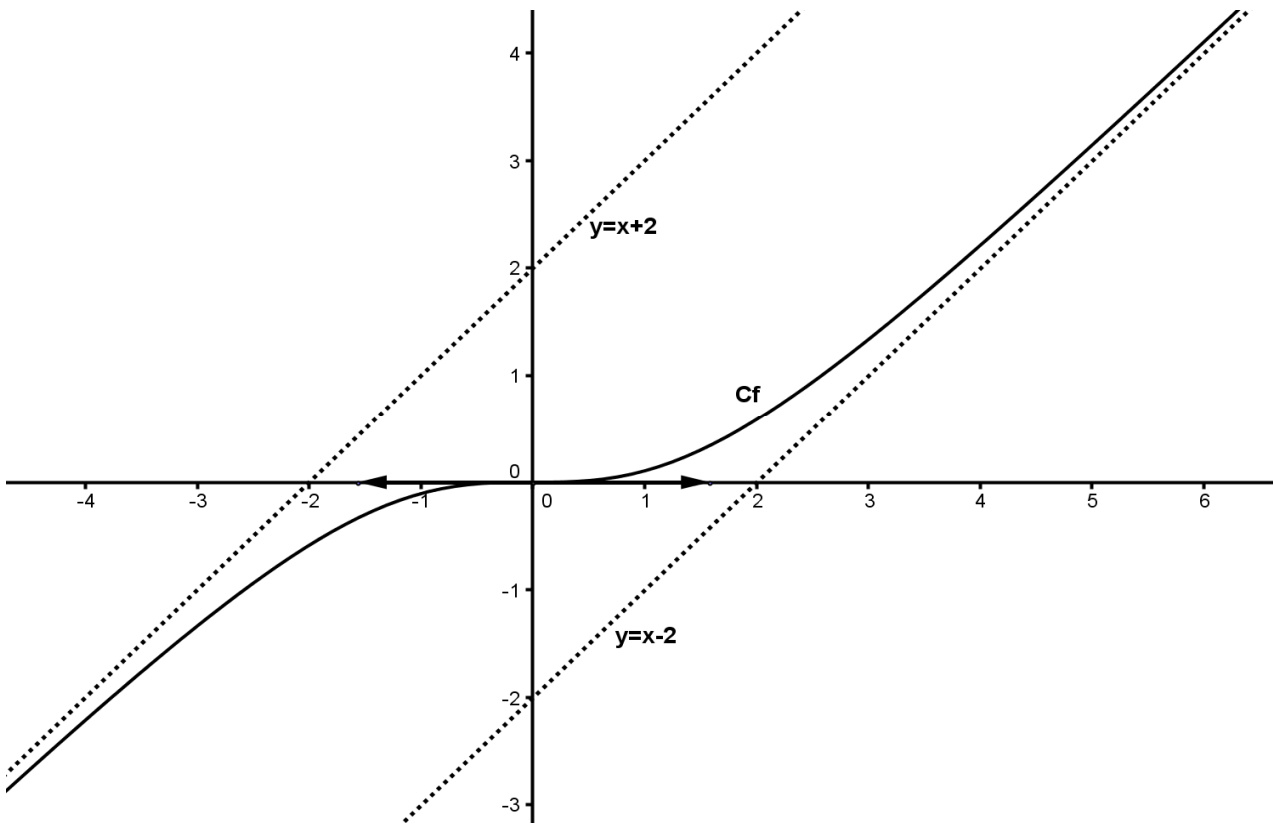
Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  est 
$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 12 - 5\alpha \\ z = 4 - 3\alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- c) Vérifier que le point  $A$  n'appartient pas à la droite  $\Delta$ .
- d) On appelle  $R$  le plan défini par le point  $A$  et la droite  $\Delta$   
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?  
« Tout point du plan  $R$  est équidistant des points  $B$  et  $C$  »  
Justifier votre réponse.

KKK 'G? A5H<G'H?

**EXERCICE N°3****( 6.5 points )**

La courbe Cf ci-dessous représente une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'asymptotes  $y = x + 2$  et  $y = x - 2$ .



- I) En utilisant le graphique :
- ❶ Déterminer le tableau de variation de  $f$ .
  - ❷ Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
  - ❸  $f^{-1}$  est-elle dérivable en 0? Expliquer.
  - ❹ Soit  $\lambda \in ]0; +\infty[$  et  $A_\lambda$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations :  $x = 0$  et  $x = \lambda$ 
    - a) Vérifier que  $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$
    - b) En déduire que:  $\frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda \leq A_\lambda \leq \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda$
    - c) En déduire  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$
- II) La courbe Cf ci-dessus représente la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax + \frac{bx}{\sqrt{x^2 + 4}}$
- ❶ Montrer que  $a=1$  et  $b=-2$  (Ind: utiliser  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  )
  - ❷ Calculer  $A_\lambda$  en fonction de  $\lambda$
  - ❸ Retrouver  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$ .

**EXERCICE N°4****( 4 points )**

On considère la suite  $(I_n)$  définie par :  $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt$  et  $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

❶ Calculer  $I_0$  et  $I_1$

❷ Montrer que  $(I_n)$  est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

❸ Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

❹ Montrer que :  $\forall t \in [0;1], 0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

❺ En admettant que:  $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ , déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .

Bon Travail

KKK 'G? A5H<G'H?