

Epreuve Mathématiques Durée : 2H	Devoir de synthèse n°1 Classe : 4^{ème} ScExp	Professeur Dhaouadi Nejib
Décembre 2013		

Exercice 1 (4 points)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- 1) La forme exponentielle du nombre complexe $-2e^{-i\frac{\pi}{5}}$ est :
 - a) $2e^{i\frac{\pi}{5}}$
 - b) $2e^{i\frac{4\pi}{5}}$
 - c) $-2e^{i\frac{4\pi}{5}}$
- 2) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $z = i - e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est :
 - a) une droite
 - b) un cercle
 - c) l'ensemble vide
- 3) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} telle que pour tout réel x non nul, $-\frac{1}{x^2} - x \leq f(x)$.
 - a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
 - b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 - c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
- 4) Soit (u_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \frac{\cos n}{n}$
 - a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
 - b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
 - c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ n'existe pas.

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{C} , par : $f(z) = z^3 - z^2 - (1-i)z - 2 - 2i$.

- 1) a) Calculer $f(2)$.
 b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z

$$f(z) = (z - 2)(z^2 + az + b).$$
- 2) Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $f(z) = 0$.
- 3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 On donne les points A, B et C d'affixes respectives $2, -1 + i$ et $-i$.
 Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Exercice 3 (5 points)

- 1) Donner les racines cinquièmes de l'unité.
- 2) Dans la suite de l'exercice on pose $w = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
 - a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1}$.

- b) En déduire que $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$
- 3) a) Vérifier que $w^3 = \bar{w}^2$ et $w^4 = \bar{w}$
- b) Montrer que : $(w + \bar{w})^2 + (w + \bar{w}) - 1 = 0$.
- c) En déduire que $4 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$.
- d) Donner alors la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Exercice 4 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} , par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n}{2 + u_n}$.

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) à l'aide de trois méthodes différentes.

1) Première méthode

- a) Vérifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 4 - \frac{8}{2 + u_n}$.
- b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq u_n < 2$.
- c) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

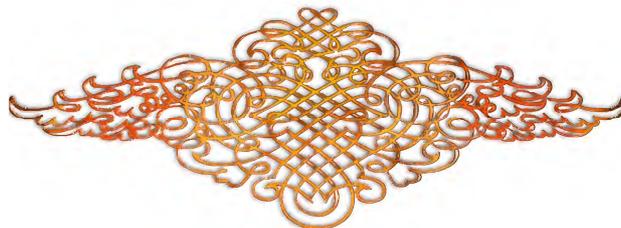
2) Deuxième méthode

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n}$.

- a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- b) Exprimer v_n et puis u_n en fonction de n .
- c) Retrouver alors les résultats de la question 1) d).

3) Troisième méthode

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$
- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- c) Conclure.



CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

Exercice 1

$$1) b) -2e^{-i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)} = 2e^{i\frac{4\pi}{5}}.$$

$$2) b) z = i - e^{i\theta} \Leftrightarrow z - i = -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)} \Leftrightarrow |z - i| = 1 \text{ et } \arg(z - i) \equiv \theta + \pi \equiv \theta' \quad [2\pi]$$

et puisque $\theta' \in \mathbb{R}$ donc $M(z)$ décrit le cercle de centre $A(i)$ et de rayon 1.

$$3) a) -\frac{1}{x^2} - x \leq f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2} - x\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$4) a) |u_n| = \left| \frac{\cos n}{n} \right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice 2

$$1) a) f(2) = 2^3 - 2^2 - 2(1-i) - 2 - 2i = \cancel{8} - \cancel{4} - \cancel{2} + \cancel{2i} - \cancel{2} - \cancel{2i} = 0$$

$$b) \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (z-2)(z^2 + az + b) = z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b$$

$$= z^3 - z^2 - (1-i)z - 2 - 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = -1 \\ b - 2a = -1 + i \\ -2b = -2 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{-2 - 2i}{-2} = 1 + i \\ b - 2a = 1 + i - 2 = -1 + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Alors pour tout } z \in \mathbb{C}, \\ f(z) = (z-2)(z^2 + z + 1 + i) \end{cases}$$

$$2) a) (1-2i)^2 = 1 - 2 \times 2i + (2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i.$$

Donc $1-2i$ est une racine carrée de $-3-4i$

$$b) f(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 + z + 1 + i) = 0 \Leftrightarrow z = 2 \text{ ou } z^2 + z + 1 + i = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1+i) = 1 - 4 - 4i = -3 - 4i = (1-2i)^2.$$

$$\text{Donc les solutions sont : } z' = \frac{-1-1+2i}{2} = -1+i \text{ et } z'' = \frac{-1+1-2i}{2} = -i$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est $S_C = \{2, -i, -1+i\}$

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $2, -1+i$ et $-i$.

$$AB = |z_B - z_A| = |-1+i-2| = |-3+i| = \sqrt{10}; \quad AC = |z_C - z_A| = |-i-2| = |2+i| = \sqrt{5}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-i+1-i| = |1-2i| = \sqrt{5}$$

On a $\begin{cases} AC^2 + BC^2 = 10 = AB^2 \Rightarrow \text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } C. \\ AC = BC \Rightarrow \text{le triangle } ABC \text{ est isocèle de sommet principal } C. \end{cases}$

Exercice 3

1) Les racines cinquièmes de l'unité sont de la forme $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2) a) Il suffit de développer l'expression $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$ on trouve $z^5 - 1$.

$$b) w \neq 1 \text{ donc } 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \frac{w^5 - 1}{w - 1} = 0 \text{ car } w^5 = 1.$$

$$3) a) w^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} \right)^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{6\pi}{5} - 2\pi\right)} = e^{-i\frac{4\pi}{5}} = \left(e^{-i\frac{2\pi}{5}} \right)^2 = \bar{w}^2$$

$$w^4 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} \right)^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{8\pi}{5} - 2\pi\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \bar{w}$$

$$\begin{aligned} b) (w + \bar{w})^2 + (w + \bar{w}) - 1 &= w^2 + 2w\bar{w} + \bar{w}^2 + w + \bar{w} - 1 \\ &= w^2 + 2 \times 1 + w^3 + w + w^4 - 1 \quad (\text{car } w\bar{w} = |w|^2 = 1; \bar{w}^2 = w^3 \text{ et } \bar{w} = w^4) \\ &= 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0 \quad (\text{d'après 2) b}) \end{aligned}$$

$$c) \text{ On sait que } w + \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(w) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\text{Donc } (w + \bar{w})^2 + (w + \bar{w}) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0.$$

$$d) \text{ On pose } t = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \in [0, 1]. \text{ L'équation précédente devient } 4t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\Delta' = 5 \Rightarrow t' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \notin [0, 1] \text{ et } t'' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ donc } \boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$$

Exercice 4

1) Première méthode

$$a) 4 - \frac{8}{2 + u_n} = \frac{8 + 4u_n - 8}{2 + u_n} = \frac{4u_n}{2 + u_n} = u_{n+1}.$$

b) \otimes Pour $n = 0$; $u_0 = 1 \in [1, 2[$ vraie

\otimes Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leq u_n < 2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} < 2$.

$$1 \leq u_n < 2 \Leftrightarrow 3 \leq 2 + u_n < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2 + u_n} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{8}{3} \leq \frac{-8}{2 + u_n} < -2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \leq 4 - \frac{8}{2 + u_n} < 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2 \text{ car } 1 < \frac{4}{3}$$

$$c) u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{4u_n - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{u_n(2 - u_n)}{2 + u_n} > 0 \text{ car } 1 \leq u_n < 2$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

d) (u_n) est croissante et majorée (par 2) donc (u_n) est convergente

On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$\left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f \text{ est la fonction définie par } f(x) = \frac{4x}{2+x} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in [1, 2] \text{ et } f \text{ continue sur } \mathbb{R} \setminus \{-2\} \text{ et en particulier sur } [1, 2] \end{array} \right.$$

Donc $f(l) = l$

$$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{4l}{2+l} = l \Leftrightarrow 4l = 2l + l^2 \Leftrightarrow l(l-2) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \notin [1, 2] \text{ ou } l = 2 \in [1, 2].$$

2) Deuxième méthode

$$a) v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1}} = \frac{\frac{4u_n}{2+u_n} - 2}{\frac{4u_n}{2+u_n}} = \frac{4u_n - 4 - 2u_n}{4u_n} = \frac{2(u_n - 2)}{4u_n} = \frac{1}{2} \frac{u_n - 2}{u_n} = \frac{1}{2} v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$b) (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n} \Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -2 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2 \Leftrightarrow u_n = \frac{-2}{v_n - 1} = \frac{2}{1 - v_n} = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$c) \frac{1}{2} \in]-1, 1[\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2}{1} = 2 \text{ donc } (u_n) \text{ converge vers } 2.$$

3) Troisième méthode

$$a) |u_{n+1} - 2| = \left| \frac{4u_n}{2+u_n} - 2 \right| = \left| \frac{2(u_n - 2)}{2+u_n} \right| = \frac{2}{2+u_n} |u_n - 2|$$

$$u_n \geq 1 \Leftrightarrow 2 + u_n \geq 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2+u_n} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{2+u_n} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{2+u_n} |u_n - 2| \leq \frac{2}{3} |u_n - 2|$$

Ce qui donne $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3} |u_n - 2|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$b) \otimes \text{ Pour } n = 0, |u_0 - 2| = 1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \text{ vraie.}$$

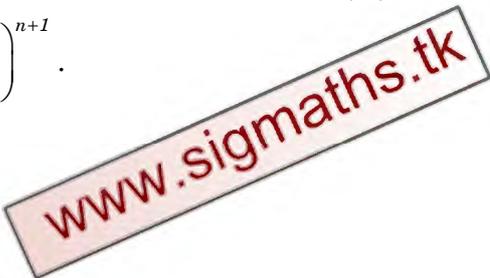
\otimes Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3} |u_n - 2| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow |u_{n+1} - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

\otimes Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$c) \begin{cases} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{2}{3} \in]-1, 1[\end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2) = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (u_n - 2) + 2 \Rightarrow (u_n)$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 + 2 = 2$.



Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths © Sigmaths -----