Epreuve : Mathématiques

Durée : 4H

Devoir de synthèse n°2

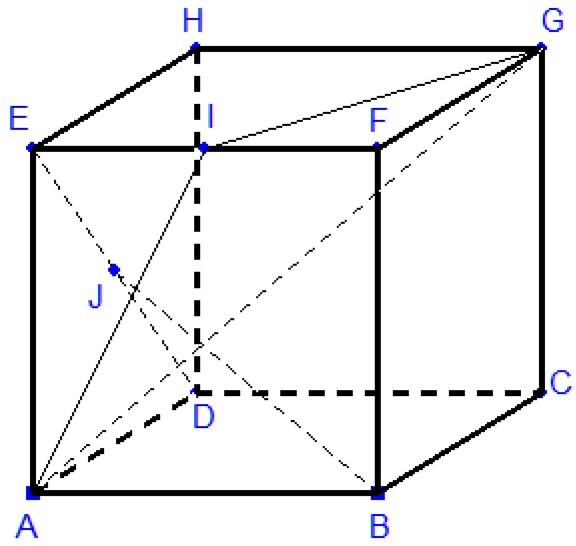
Classe : 4ème Maths

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous où I est le milieu de [EF] et J est le centre de la face ADHE.



On rapporte l'espace au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Pour chacune des propositions suivantes, répondre par vrai ou faux.

1) *Le plan (AIG) admet pour équation cartésienne* $2x - y - z = 0$.

2) *La droite (BJ) est orthogonale au plan (AIG).*

3) $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$.

4) *Le volume du tétraèdre ABDJ est égal à* $\dfrac{1}{12}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ *par :*

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^2\left(3 - 2\ln x\right) \quad si \quad x > 0 \end{cases}.$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

1) *Calculer* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. *Que peut-on en déduire pour la fonction f ?*

2) a) *Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.*

b) *Montrer que f est dérivable sur l'intervalle* $]0\ ;\ +\infty[$ *et calculer* $f'(x)$ *pour* $x > 0$.

3) *Dresser le tableau de variation de f*

4) *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *possède une solution unique* α *sur l'intervalle* $]0\ ;\ +\infty[$ *et vérifier que* $\alpha = e\sqrt{e}$.

Partie B

1) *Donner une équation de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse 1.*

2) *On considère la fonction* $g : x \mapsto f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right)$ *définie sur l'intervalle* $]0\ ;\ +\infty[$.

a) *Calculer* $g'(x)$, *puis* $g''(x)$. *Dresser le tableau de variations de g'.*

En déduire que $g'(x) \leq 0$ *sur* $]0\ ;\ +\infty[$.

b) *Donner alors la position de la courbe C par rapport à la tangente D.*

3) *Construire la courbe C et la tangente D.*

Partie C

1) *Soit n un entier naturel non nul.*

Exprimer en fonction de n le réel $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x dx$ *(on pourra utiliser une intégration par parties).*

2) *En déduire, en fonction de l'entier n, l'aire* A_n *du domaine plan délimité par la courbe C, la tangente D et les deux droites d'équation* $x = \frac{1}{n}$ *et* $x = 1$

.3) *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$ *et interpréter le résultat obtenu.*

Exercice 3

On considère les suites (u_n) *et* (I_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par:*

$$u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1} \qquad et \qquad \begin{cases} I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \\ I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \qquad (\ n \in \mathbb{N}^*\ ) \end{cases}$$

1) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. *En déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

2) *Vérifier que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

3) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = I_0 - (-1)^{n+1} I_{n+1}$.

4) *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$

Exercice 4

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne un triangle OAC direct, rectangle et isocèle en A tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ *et C d'ordonnée positive.*

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre C tangent à la droite (OA) en A. Le segment $[OC]$ coupe $\mathscr{C}$ en F qui se projette orthogonalement en K sur la droite (OA).

1) *Faites une figure*

2) *Montrer que C appartient à la parabole (P) de foyer F et de directrice (OA)*

3) *Montrer que F a pour coordonnées $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$*

4) *On désigne par S le milieu de $[FK]$.*
   a) *Déterminer les coordonnées de S dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.*
   b) *Donner les coordonnées des points F et C ainsi que l'équation de la droite (OA) dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$.*
   c) *Donner l'équation de la parabole (P) dans $(S,\vec{i},\vec{j})$ puis l'équation de la tangente (T) à (P) en C.*

5) *la tangente (T) coupe la droite (OA) en un point J.*

   Montrer que CFJ est un triangle rectangle en F.

Exercice 5

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne :

- *les points $A(1,-2,1)$, $B(2,-1,3)$, $C(1,1,4)$ et $H(0,0,2)$.*
- *la droite Δ définie par :* $\begin{cases} x = t+2 \\ y = t+2 \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$

1) a) *Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.*
   b) *Ecrire une équation du plan (ABC).*

2) a) *Démontrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) en H.*
   b) *Démontrer que H est équidistant de A , B et C.*

3) *Soit M un point variable de Δ et $E(2\,;2\,;0)$ un point fixe de Δ.*
   Pour quelles valeurs de t le volume du tétraèdre $MABC$ est-il égal au double de celui du tétraèdre $EABC$?

4) a) *Donner une équation du plan P médiateur du segment $[AE]$*
   b) *Donner une équation de la sphère S circonscrit au tétraèdre $EABC$.*

Correction du devoir

Exercice 1

1) **Vrai** : $A(0,0,0)$, $I\left(\frac{1}{2},0,1\right)$ et $G(1,1,1)$. Les coordonnées de chacun des points

A, I et G vérifies l'équation donnée.

2) **Vrai** : $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)\Rightarrow J\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow$ $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AI}=0$ et $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AG}=0$
Donc le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AIG)
et par suite la droite (BJ) est $\perp$ au plan (AIG)

3) **Faux** : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est une base orthonormée directe donc $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}$

d'où $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}$

4) **Vrai** : Le volume du tétraèdre $ABDJ$ est égal à :

$$\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AJ}\right|=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AJ}\right|=\frac{1}{12}$$

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2}x^2\left(3-2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x\right)=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

2) a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3}{2}x-x\ln x=0$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$

b) La fonction $\ln$ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ donc f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ (Somme et produit de fonctions dérivable)

$\forall x\in\left]0,+\infty\right[$; $f'(x)=x(3-2\ln x)+\frac{1}{2}x^2\left(-\frac{2}{x}\right)=2x(1-\ln x)$

3)

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

4) D'après le tableau de variations de f on a :

$$\forall x \in \left]0,e\right]; \quad 0 < f(x) \leq \frac{e^2}{2} \Rightarrow .f(x) \text{ non nul sur } \left]0,e\right]$$

f est continue et strictement décroissante sur $\left[e,+\infty\right[$ donc f réalise une bijection de $\left[e,+\infty\right[$ sur $f\left(\left[e,+\infty\right[\right) = \left]-\infty, \frac{e^2}{2}\right]$ et puisque $0 \in \left]-\infty, \frac{e^2}{2}\right]$ donc l'équation $f(x) = 0$ **admet**, dans $\left[e,+\infty\right[$, une solution **unique** α.

$$f(e\sqrt{e}) = \frac{1}{2}e^3\left(3 - 2\ln\left(e\sqrt{e}\right)\right) = \frac{1}{2}e^3\left(3 - 2\ln e - 2\times\frac{1}{2}\ln e\right) = \frac{1}{2}e^3(3-2-1) = 0$$

<u>Conclusion :</u> L'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et que $\alpha = e\sqrt{e}$.

Partie B

1) $D : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + \frac{3}{2} = 2x - \frac{1}{2}$

2) a) $g'(x) = f'(x) - 2 = 2x(1-\ln x) - 2$

et $g''(x) = -2\ln x$.

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	-2 ↗	0	↘ $-\infty$

$$\lim_{x\to0^+} g'(x) = \lim_{x\to0^+}(2x - 2x\ln x - 2) = -2$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} g'(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x(1-\ln x) - 2 = -\infty$$

D'après le tableau de variations de g' on a : $g'(x) \leq 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

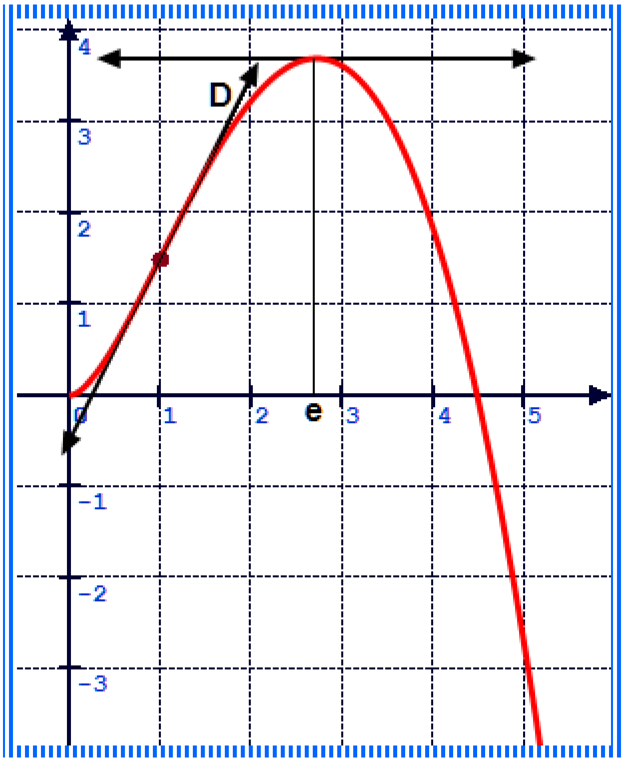
b) D'après a) g est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $g(1) = 0$

Donc $g(x) \geq 0$ sur $\left]0,1\right]$

et $g(x) \leq 0$ sur $\left[1,+\infty\right[$

Ce qui permet de dire que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la tangente D sur $\left]0,1\right]$ et au dessous de la tangente D sur $\left[1,+\infty\right[$.

3) -->>



Partie C

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\ln x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}\ln\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\ln n}{n^3} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{n^3}\right)$$

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(f(x) - (2x - \frac{1}{2})\right)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2 - x^2\ln x - (2x - \frac{1}{2})\right)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2})\right)dx - I_n = \left[\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n$$

$$= -\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3}\frac{\ln n}{n^3} + \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{n^3}\right).$$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3}\frac{\ln n}{n^3} + \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{9}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^3} = 0$

Si $n \to +\infty$ *alors* $\frac{1}{n} \to 0$. *Donc* $\frac{1}{9}$ *est l'aire (en unité d'aire) de la région délimitée par la courbe* $\mathscr{C}$, *la tangente D et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$.

Exercice 3

1)

- *Soit n un entier naturel non nul*

$$0 \le t \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 1 + t \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{1+t} \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{t^n}{1+t} \le t^n$$

Donc $$0 \le I_n \le \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

- *Pour n=0 on a ;* $I_0 = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2 \Rightarrow 0 \le I_0 \le \frac{1}{1+0}$

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le I_n \le \dfrac{1}{n+1} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{La suite } (I_n) \text{ est convergente} \\ \text{et } \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0 \end{array} \right.$$

2) $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{1+t}{1+t}dt = 1 = \frac{1}{0+1}$

Et $\forall n \in \mathbb{N}^*; I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^n(1+t)}{1+t}dt = \int_0^1 t^n dt$

$$= \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

3) $$u_n = \sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k(I_k + I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k I_k + \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k I_{k+1}$$

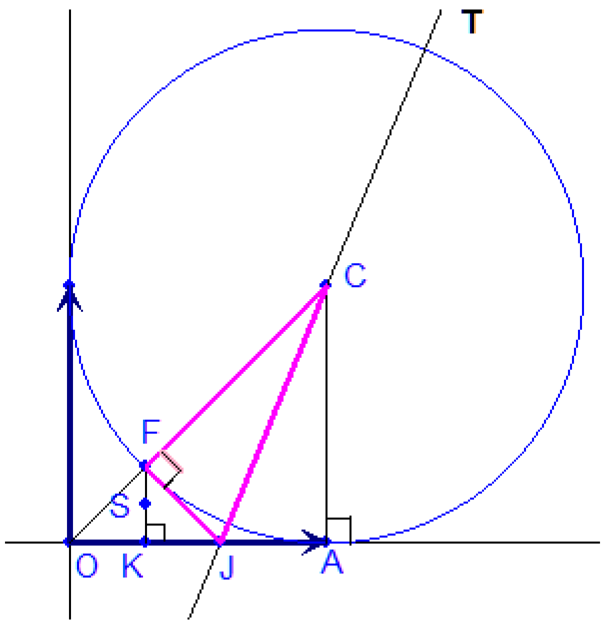
$$= \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k I_k + \sum_{k=1}^{k=n+1}(-1)^{k-1} I_k = I_0 + \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k I_k + \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1} I_k + (-1)^n I_{n+1}$$

$$= I_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \underbrace{\left((-1)^k + (-1)^{k-1}\right)}_{-1+1 \ ou \ 1-1 \ donc \ =0} I_k + (-1)^n I_{n+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1} = I_0 - (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

4) $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - I_0\right| = I_{n+1}$ avec $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n - I_0 = 0$

Et comme $u_n = (u_n - I_0) + I_0$ pour tout entier naturel n alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = I_0 = \ln 2$.

Exercice 4



1) Voir figure ci-contre.

2) F est un point qui n'appartient pas à la droite (OA).

$CA = OA = 1$ et $F \in \mathscr{C} \Rightarrow CF = 1$

$CF = CA$ avec A projeté orthogonal de C sur (OA) donc C est un point de la parabole (P) de foyer F et de directrice (OA).

3) $\overrightarrow{OF} = a \cdot \overrightarrow{OC}$ avec $a > 0$ et

$OF = OC - FC = \sqrt{2} - 1$

Alors $OF = a \cdot OC = a\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$

Donc $a = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\overrightarrow{OF} = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\overrightarrow{OC}$

D'où

$\overrightarrow{OF} = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow F\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4) a) $F\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $K\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et S milieu de $[FK] \Rightarrow S\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

b) $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OF} \Rightarrow F\left(0, \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}\right)$ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$

$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)$ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$

Dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (OA) admet pour équation : $Y = -\dfrac{FK}{2} = -\dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

c) (P) est une parabole de paramètre $p = FK = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'axe focal $(S, \vec{j})$

Donc $X^2 = 2pY = (2 - \sqrt{2})Y$ est l'équation de (P) dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$.

L'équation, dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, de la tangente T à la parabole (P) au point C est :

$X \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = p\left(Y + \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)$

Ce qui donne après développement et simplification $2\sqrt{2}X - 2(2 - \sqrt{2})Y - 1 = 0$

5) Soit (a,b) les coordonnées de J dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$

$$\{J\} = (OA)\cap T \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 2\sqrt{2}a - 2\left(2-\sqrt{2}\right)b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 2\sqrt{2}a + 2\left(2-\sqrt{2}\right)\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 2\sqrt{2}a + \dfrac{6-4\sqrt{2}}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 2\sqrt{2}a + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = -\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$ on a : $F\left(0,\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$ et $J\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$

$$FC^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1, \quad FJ^2 = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = 3-2\sqrt{2}$$

$$CJ^2 = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$FC^2 + FJ^2 = 1 + 3 - 2\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2} = CJ^2$ donc le triangle CFJ est rectangle en F.

Exercice 5

1) a) $$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}1&3\\2&3\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}1&0\\1&3\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix} \neq \vec{0}$$ donc A, B et C ne sont pas alignés.

b) Le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$$M(x,\ y,\ z)\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow -3(x-1) - 3(y+2) + 3(z-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow -3x - 3y + 3z - 6 = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$$

Donc le plan (ABC) admet pour équation $\boxed{x+y-z+2=0}$.

2) a) Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{n} = -3\vec{u}$ donc Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

En plus $M(x,y,z)\in(ABC)\cap\Delta \Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$ avec $x = t+2,\ y = t+2,\ z = -t$

Donc $t + 2 + t + 2 + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow M(0,0,2)$ et par suite M=H.

b) $AH = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$, $BH = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ et $CH = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

Donc $AH = BH = CH$.

3) On note V le volume du tétraèdre EABC et V(t) le volume du tétraèdre MABC.

On a : $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}t+1\\t+4\\-t-1\end{pmatrix}$

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{6}\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{6}\left|-3-12-3\right|=3$$

$$V(t)=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{6}\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{6}\left|-3(t+1)-3(t+4)+3(-t-1)\right|$$
$$=\frac{1}{6}\left|-9t-18\right|=\frac{3}{2}\left|t+2\right|$$

$$V(t)=2V\Leftrightarrow\frac{3}{2}\left|t+2\right|=6\Leftrightarrow\left|t+2\right|=4\Leftrightarrow\begin{cases}t+2=4\\ ou\\ t+2=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\ ou\\ t=-6\end{cases}$$

4) a) Soit I le milieu du segment $[AE]$. On a $I\left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$

$$M(x,y,z)\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AE}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)+4y-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\boxed{x+4y-z-1=0}$$

b) Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) en H et H équidistant de A,B et C

Donc Δ est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC et par suite c'est l'ensemble de points équidistants de A, B et C.

Soit $\Omega(x,y,z)$ le centre de la sphère S alors $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega E\Leftrightarrow\Omega\in\Delta\cap P$.

$\Omega\in\Delta\cap P\Leftrightarrow x+4y-z-1=0$ avec $x=t+2, y=t+2$ et $z=-t$

Donc $t+2+4t+8+t-1=0\Leftrightarrow t=-\frac{3}{2}$ et par suite $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

Le rayon de la sphère S : $\Omega E=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

L'équation réduite de la sphère S est : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$