Prof: Missaoui Taoufik

DEVOIR DE SYNTHESE N°2

✧✧✧

Date : 16-05-2011 ꕥ Durée : 3heures

✧✧✧

SECTION : 4 EME ꕥ SCIENCES EXPERIMENTALES 1

Exercice 1 (3points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1) Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé, on donne les points $A(-1,-1,-1)$ et $B(1,1,1)$ alors le plan médiateur du segment $[AB]$ a pour équation :

$\boxed{a}$ $x-y+z=0$

$\boxed{b}$ $x+y+z=0$

$\boxed{c}$ $x+y-z=0$

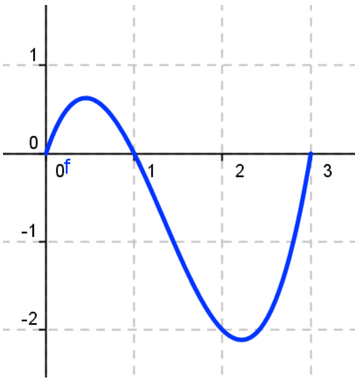
2) La limite de $x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à :

$\boxed{a}$ 0

$\boxed{b}$ 1

$\boxed{c}$ 2

3) Dans le graphique ci-contre, on a représenté une fonction f continue sur $[0,3]$ alors l'intégrale $I=\int_0^3 f(x)dx$ est :



$\boxed{a}$ $I>0$

$\boxed{b}$ $I<0$

$\boxed{c}$ $I=0$

Exercice 2 (4points)

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n=\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\geq 0$

b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante puis déduire q'elle est convergente

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\leq\dfrac{e}{n+1}$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 3 (6points)

L'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points

$A(0,-2,0)$, $B(\sqrt{3},1,0)$, $C(-\sqrt{3},1,0)$ et $D(0,0,2\sqrt{2})$

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral de centre O

2) a) Calculer $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AC}$ puis déduire que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires

b) Déterminer alors le volume du tétraèdre $ABCD$

3) Soit (S) la sphère de centre O et de rayon OC et H le point du plan (ABD) défini par $\overrightarrow{AH}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AD}$

a) Déterminer les coordonnées du point H

b) Vérifier que la droite (OH) est perpendiculaire au plan (ABD)

c) Déduire l'intersection de la sphère (S) avec le plan (ABD)

Exercice 4 (7points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est impaire

2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	
f	0	$\nearrow$	1

a) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

b) Justifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

c) Tracer (T) et (C)

3) Soit $\alpha<0$

a) Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x=\alpha$, $x=0$ et $y=-1$

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\mathscr{A}(\alpha)$

4) a) Montrer que pour tout $x\in IR$: $f'(x)=1-\left(f(x)\right)^2$

b) Calculer le volume $\mathscr{V}$ du solide de révolution obtenu par rotation au tour de l'axe (Ox) de l'arc $\Gamma=\left\{M(x,y)\ ,\ 0\le x\le\ln\sqrt{3}\ \ et\ \ y=f(x)\right\}$

5) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

b) Déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-0,5}^{0,5}\frac{1}{1-x^2}\,dx$