DEVOIR DE SYNTHESE N°1

✧✧✧

Date : 8-12-2010 ꕥ Durée : 2heures

✧✧✧

SECTION : 4 EME ꕥ SCIENCES EXPERIMENTALES

Prof: Missaoui Taoufik

Exercice 1 (3points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1) Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{(-3)^n},\ n \geq 0$ alors

$\boxed{a}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$\boxed{b}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

$\boxed{c}$ (u_n) N'admet pas de limite

2) La fonction dérivée de $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$\boxed{a}$ $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$\boxed{b}$ $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$\boxed{c}$ $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

3) Les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^{1005} = i$ sont de la forme.

$\boxed{a}$ $z_k = e^{i\pi\left(\frac{4k+1}{1005}\right)}$ *où* $0 \leq k \leq 1004$

$\boxed{b}$ $z_k = e^{i\pi\left(\frac{4k+1}{2010}\right)}$ *où* $0 \leq k \leq 1004$

$\boxed{c}$ $z_k = -e^{i\pi\left(\frac{4k+1}{2010}\right)}$ *où* $0 \leq k \leq 1004$

Exercice 2 (6points)

1) Soit α un réel de l'intervalle $[0,\pi]$ et l'équation $(E_\alpha): z^2-(1+2i+i\cos\alpha)z+2i-2\cos\alpha=0$

a) Montrer que l'équation (E_α) admet une solution imaginaire z_0 que l'on déterminera

b) Trouver alors l'autre solution z_1 de (E_α) en fonction de α

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points

A *et* M d'affixes respectives $a=\frac{1}{2}i$ et $m=1+i\cos\alpha$

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque α varie dans $[0,\pi]$

b) Vérifier que $\frac{m}{a}=2\cos\alpha-2i$

c) Déduire la valeur de α dans $[0,\pi]$ pour que OAM soit un triangle rectangle en O.

Exercice 3 (5points)

1) Soit la suite (u_n) définie pour tout, $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $t_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-.......+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

a) Montrer que pour tout $n\geq 1$: on a : $t_{2n+2}-t_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}}$

En déduire que la suite $(t_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante

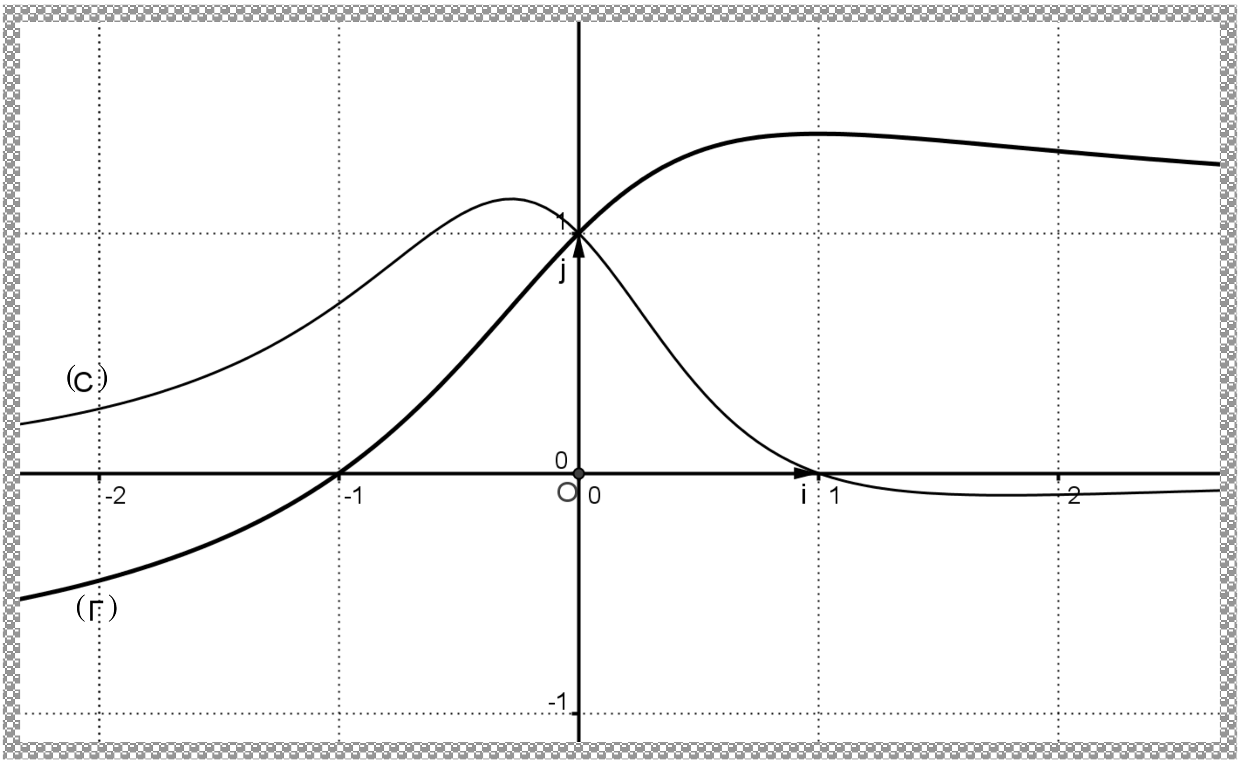
b) Montrer que la suite $(t_{2n+1})_{n\geq 1}$ est décroissante

c) Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$: on a : $t_{2n+1}>t_{2n}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_{2n+1}-t_{2n})$

3) Montrer que la suite (t_n) est convergente vers un réel α et que $t_4\leq\alpha\leq t_5$

Exercice 4 (6points)

I) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, les courbes (C) et (Γ), représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur IR et de sa fonction dérivée f'



1) Identifier la courbe représentative de f et celle de f'.
2) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$
3) Dresser le tableau de variation de la restriction de f à l'intervalle $[-2;2]$. (On ne cherchera pas à calculer $f(2)$ ni $f(-2)$).

II) La fonction f est définie sur IR par $f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{1+x^2}}$ où a et b sont deux réels

1) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{a-bx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
   b) Montrer que $a=b=1$
   c) Dresser le tableau de variation de f sur IR
2) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
   b) Etudier le signe de $f(x)-(x+1)$, en déduire la position relative de la courbe de f et T
3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $[1,+\infty[$ une unique solution α et vérifier que $1<\alpha<2$