Devoir de contrôle n°1

Classe : 4ème Math

Durée de l'épreuve : 2H

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit (u_n) la suite réelle définie pour tout entier naturelle n par : $u_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{3x^2-10x+7}}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$	c) f n'a pas de limite en 1

3) Soit θ un réel de l'intervalle $]\pi, 3\pi[$. On pose $z = -1 - e^{i\theta}$.

a) $\arg z \equiv \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$	b) $\arg z \equiv -\dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$	c) $\arg z \equiv \dfrac{\theta+\pi}{2}\ [2\pi]$

4) l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet:

a) Une seule solution réelle	b) Deux solutions réelles	c) Trois solutions réelles

5) Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi]$. On pose $z = 1 - i + e^{i\frac{\theta}{2}}$ et M le point d'affixe z dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct.
L'ensemble décrit par le point M quand θ décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$ est :

a) Un cercle	b) Un demi cercle	c) Une droite

6) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A d'affixe $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$. La forme exponentielle de l'affixe du point A' image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est :

a) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$	b) $e^{i\frac{\pi}{3}}$	c) $e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 2

Partie A

Soit λ *un nombre complexe. On pose* $f(z)=z^3-(1+\lambda)z^2+(\lambda-6)z+6\lambda$

1) a) Montrer que λ *est une solution de l'équation* $f(z)=0$.

b) Déterminer les nombres complexes a et b pour lesquels:

$f(z)=(z-\lambda)(z^2+az+b)$ *pour tout nombre complexe z.*

2) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, *l'équation* $f(z)=0$.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, *on considère les points*

A, B, C et M d'affixes respectives $-2, 3, -2i$ *et* λ.

On pose $\lambda=m+2i$ *où* $m\in\left]-4,6\right[$.

1) Déterminer l'ensemble des points M quand m décrit $\left]-4,6\right[$.

2) a) Vérifier que pour tout réel $m\in\left]-4,6\right[$ *; les points A, B et M ne sont pas alignés.*

b) Les points A, C et M sont-ils alignés? Justifier

c) Les points B, C et M sont-ils alignés? Justifier

3) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles ABM est un triangle rectangle en M.

4) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles ABM est un triangle isocèle.

5) Déterminer le réel m pour lequel le quadrilatère ACBM est un parallélogramme.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ *sont tracées les courbes* $\left(C_f\right)$ *et* $\left(C_g\right)$

représentatives des fonctions f et g (voir page 4).

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ *et sa courbe* $\left(C_f\right)$ *admet deux branches infinies de direction celle de* $\left(O,\vec{j}\right)$.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ *et telle que les droites d'équations*

$x=-1$, $x=1$ *et* $y=1$ *sont des asymptotes à sa courbe* $\left(C_g\right)$.

1) Déterminer graphiquement:

a) $gof(0)$, $fog(0)$, $gof(1)$ et $fog(-2)$.

b) $f\left(]-\infty,2]\right)$, $g\left(]-\infty,-1[\right)$, $g\left(\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\right)$, $fog\left(]-1,1[\right)$ et $fog\left(]1,+\infty[\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$, $\lim\limits_{x\to1} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} gof(x)$

2) Dresser les tableaux de variations de chacune des fonctions f et g

Exercice n° 4

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2 .

2) Soit (w_n) la suite définie pour tout entier n par ; $w_n = v_n - u_n$

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

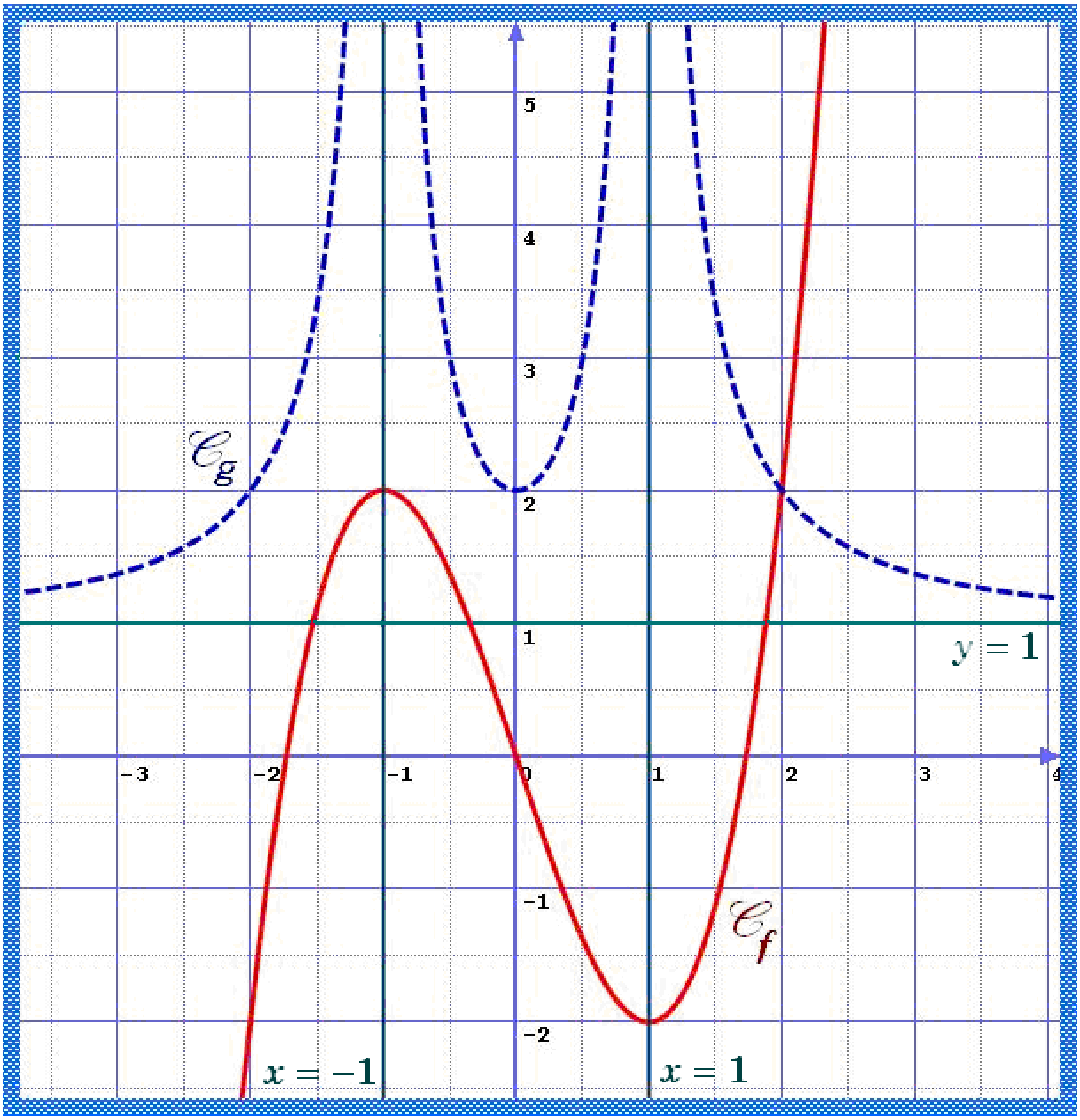
b) Déterminer le sens de variation de chacune des suites (u_n) et (v_n).

c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire?

3) On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_n = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$.

a) Montrer que la suite (t_n) est constante.

b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).



5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
$\mathscr{C}_g$
$\mathscr{C}_f$
$y = 1$
$x = -1$
$x = 1$

Exercice 1

1) c)

$$u_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n} \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

car $\frac{2}{5} \in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

2) a)

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{3x^2-10x+7}} = \sqrt{\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(7-3x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+x}{7-3x}} \quad \text{Donc} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3)a)

$$z = -e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\theta \in]\pi, 3\pi[\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$$

$$\Rightarrow -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \text{ donc } \arg z \equiv \frac{\theta}{2} \quad [2\pi]$$

4) a) Posons $f(x) = x^3 + x + 1$.

F continue sur $[-1,1]$ et $f(-1)\times f(1) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]-1,1[$ en plus f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ($f'x) = 3x^2 + 1 > 0$) donc cette solution est l'unique solution réelle de l'équation $f(x) = 0$.

5) b) Soit A et M les points d'affixes respectives 1-i et z

$$z = 1 - i + e^{i\frac{\theta}{2}} \Leftrightarrow z - (1-i) = e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-(1-i)| = 1 \\ \arg(z-(1-i)) \equiv \frac{\theta}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM = 1 \\ (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{AM}}) \equiv \frac{\theta}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

Donc M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

En plus $\theta \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in [0, \pi]$

donc l'ensemble des points M est le demi cercle de diamètre $[BC]$ avec

$B(2-i)$ et $C(-i)$.passant par le point d'affixe 1.

6) a) $z_A = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

et $z_{A'} = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 2

Partie A

1) a)

$$f(\lambda) = \lambda^3 - (1+\lambda)\lambda^2 + (\lambda-6)\lambda + 6\lambda$$
$$= \cancel{\lambda^3} - \cancel{\lambda^2} - \cancel{\lambda^3} + \cancel{\lambda^2} - \cancel{6\lambda} + \cancel{6\lambda} = 0$$

b)

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (z-\lambda)(z^2 + az + b)$$
$$= z^3 + az^2 + bz - \lambda z^2 - \lambda az - \lambda b$$
$$= z^3 + (a-\lambda)z^2 + (b-\lambda a)z - \lambda b$$

Donc, par identification, on obtient

$$\begin{cases} a - \lambda = -1 - \lambda \\ b - \lambda a = \lambda - 6 \\ -\lambda b = 6\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \\ -\lambda \times (-6) = 6\lambda \text{ vrai} \end{cases}$$

Alors pour tout nombre complexe z,

$f(z) = (z-\lambda)(z^2 - z - 6)$.

2) $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = \lambda$ ou $z^2 - z - 6 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 = 5^2$

$\Rightarrow z' = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $z'' = \dfrac{1+5}{2} = 3$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{-2, 3, \lambda\}$

Partie B

1) $z = m + 2i = x + iy$
$\Leftrightarrow x = m \in]-4, 6[$ et $y = 2$

Donc M décrit le segment $[EF]$ inclus dans la droite d'équation $y = 2$ privé des points E et F où E et F sont les points d'affixes respectives $-4 + 2i$ et $6 + 2i$.

2) a) $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \dfrac{m + 2i + 2}{3 + 2} \notin \mathbb{R}$ Donc les points A, B et M ne sont pas alignés.

b) $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{m + 2i + 2}{-2i + 2} = \dfrac{m + 2 + 2i}{2 - 2i}$

$\dfrac{(m + 2 + 2i)(2 + 2i)}{8} = \dfrac{1}{4}(m + (4 + m)i)$

A, C et M alignés ssi $\dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = -4$

ce qui est impossible car $m \in]-4, 6[$

c) $\dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = \dfrac{m + 2i - 3}{-2i - 3} = \dfrac{m - 3 + 2i}{-3 - 2i}$

$\dfrac{m - 3 + 2i}{-3 - 2i} = -\dfrac{1}{13}(3m - 5 + (12 - 2m)i)$

B, C et M alignés ssi $\dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = 6$

ce qui est impossible car $m \in]-4, 6[$

3) ABM rectangle en $M \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow (m + 2)^2 + 4 + (m - 3)^2 + 4 = 25$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$ ou $m = 2$

4) ABM isocèle ssi $AB = AM$ ou $AB = BM$ ou $AM = BM$

$$\boxed{\begin{aligned} &AB = AM \Leftrightarrow |m + 2 + 2i| = 5\\ &(m + 2)^2 + 4 = 25 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 17 = 0\\ &m = \frac{-4 - \sqrt{84}}{2} \notin]-4, 6[\text{ ou } m = \frac{-4 + \sqrt{84}}{2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &AB = BM \Leftrightarrow |m - 3 + 2i| = 5\\ &(m - 3)^2 + 4 = 25 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 12 = 0\\ &\Leftrightarrow m = \frac{6 - \sqrt{84}}{2} \text{ ou } m = \frac{6 + \sqrt{84}}{2} \notin]-4, 6[\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &AM = BM \Leftrightarrow |m + 2 + 2i| = |m - 3 + 2i|\\ &\Leftrightarrow (m - 3)^2 + 4 = (m + 2)^2 + 4\\ &\Leftrightarrow -6m + 13 = 4m + 8 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

Donc les valeurs de m pour lesquelles ABM est un triangle isocèle sont: $\dfrac{-4 + \sqrt{84}}{2}$, $\dfrac{6 - \sqrt{84}}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

5) $ACBM$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MB}$

(On sait dèja que A, B et M ne sont pas alignés)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow -\cancel{2i} + 2 = 3 - m - \cancel{2i}$

$\Leftrightarrow m = 1$

Exercice 3

1) a) $gof(0) = g(0) = 2$, $fog(0) = f(2) = 2$

$gof(1) = g(-2) = 2$, $fog(-2) = f(2) = 2$

b)

$f(]-\infty, 2]) =]-\infty, 2]$, $g(]-\infty, -1[) =]1, +\infty[$

$g(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) =]1, +\infty[$

$fog(]-1, 1[) = f([2, +\infty[) = [2, +\infty[$

$fog(]1, +\infty[) = f(]1, +\infty[) =]-2, +\infty[$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to-1} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1} g(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} gof(x) = 1$

2)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

Exercice n° 4

1) $u_1 = \dfrac{u_0+v_0}{2} = \dfrac{7}{2},\ v_1 = \dfrac{u_1+v_0}{2} = \dfrac{\frac{7}{2}+4}{2} = \dfrac{15}{4}$

$$u_2 = \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2}+\frac{15}{4}}{2} = \frac{29}{8}$$

$$v_2 = \frac{u_2+v_1}{2} = \frac{\frac{29}{8}+\frac{15}{4}}{2} = \frac{59}{16}$$

2) a)

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n-u_n-v_n}{2}$$

$$= \frac{\frac{u_n+v_n}{2}-u_n}{2} = \frac{v_n-u_n}{4} = \frac{1}{4}w_n$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n+v_n}{2} - u_n = \dfrac{1}{2}w_n \geq 0$

car $w_n = w_0\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \geq 0$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - v_n = \frac{\frac{u_n+v_n}{2}+v_n}{2} - v_n$$

$$= \frac{u_n+3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n-v_n}{4} = -\frac{1}{4}w_n \leq 0$$

Donc (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geq 0 \Rightarrow u_n \leq v_n \quad (*)$

(u_n) croissante et (v_n) décroissante (**)

$\dfrac{1}{4} \in]-1,1[\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \quad (***)$

$(*), (**)$ et $(***) \Rightarrow (u_n)$ et (v_n) adjacentes

Donc ces deux suites convergent vers une même limite l.

3) a)

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n+v_n}{2}+2\frac{u_n+3v_n}{4}}{3}$$

$$= \frac{u_n+v_n+u_n+3v_n}{6} = \frac{2u_n+4v_n}{6} = t_n$$

Donc (t_n) est une suite constante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = t_0 = \dfrac{u_0+2v_0}{3} = \dfrac{11}{3}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_n+2v_n}{3} = \dfrac{11}{3}$ et par passage aux limites on obtient $l = \dfrac{11}{3}$.