Dérivabilité

I. Rappels

I. Dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de centre a.

f dérivable en a $\Leftrightarrow$ le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a, notée $f'(a)$ et appelée nombre dérivé de f en a

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+\alpha[$.

f dérivable à droite en a $\Leftrightarrow$ le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite en a, notée $f_d'(a)$.

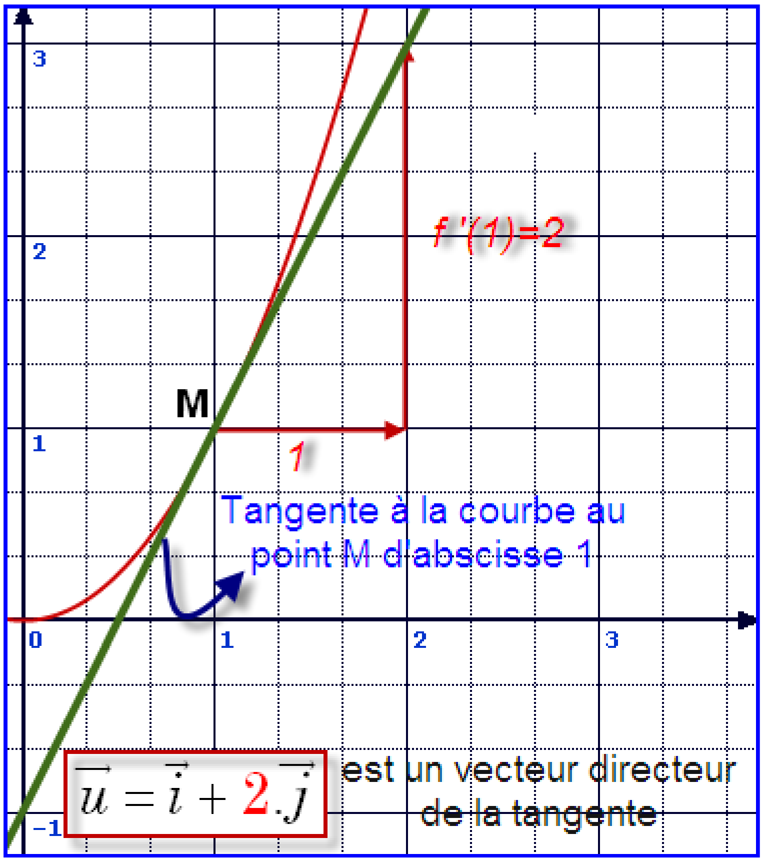
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a+\alpha, a]$.

f dérivable à gauche en a $\Leftrightarrow$ le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à gauche en a, notée $f_g'(a)$.

Interprétation graphique et approximation affine :

- *Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet, au point d'abscisse a, une tangente de coefficient directeur $f'(a)$*
- *$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(a)\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente.*
- *Cette tangente admet pour équation cartésienne $y = f'(a)(x-a)+f(a)$*

La figure suivante représente la courbe d'une fonction f dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.



- *Au voisinage du point M(a,f(a)), la courbe et la tangente sont presque confondues. Donc, sur un petit voisinage de a on peut assimiler la branche de la courbe de f à un segment (de la tangente).*

Et de cette façon, on peut obtenir une approximation de f(x) si x est proche de a en remplaçant f(x) par $f'(a)(x-a)+f(a)$.

On dit alors que f(a) + (x-a)f '(a) est l'approximation affine locale de f(x).

Exemple1 : $f(x) = \sin x$. *f est dérivable en 0 et* $f'(0) = 1$!

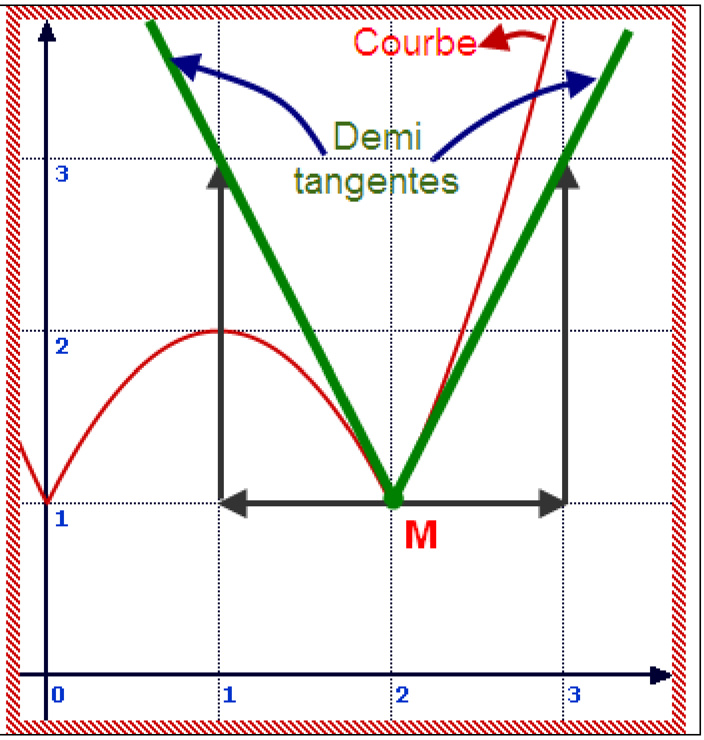
Donc *pour x proche de 0* *on a* $\sin x \simeq 1.(x-0) + \sin 0$ *ou encore* $\boxed{\sin x \simeq x}$

Exemple2 : $f(x) = \sqrt{1+x}$. *f est dérivable en 0 et* $f'(0) = \dfrac{1}{2}$!

Donc *pour x proche de 0* *on a* $\sqrt{1+x} \simeq f'(0).(x-0) + f(0)$ *ou encore* $\boxed{\sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{x}{2}}$

- *Si f est dérivable à droite en a alors la courbe représentative de f admet, au point d'abscisse a, une demi tangente de coefficient directeur* $f_d'(a)$.
- *De même si f est dérivable à gauche en a alors la courbe de f admet, au point d'abscisse a, une demi tangente de coefficient directeur* $f_g'(a)$.

Dans la figure ci contre :
La fonction f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 2$.
f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = -2$.
Remarque :
Dans le cas où f est dérivable à gauche en a, il est plus pratique de choisir $\begin{pmatrix} -1 \\ -f'_g(a) \end{pmatrix}$ *comme vecteur directeur au lieu de* $\begin{pmatrix} 1 \\ f'_g(a) \end{pmatrix}$ *(comme dans le cas de cet exemple)*



2. Dérivabilité sur un intervalle

- *On dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert, si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.*
- *On dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle* $[a, b]$ *si elle est dérivable sur* $]a, b[$ *, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.*
- *L'application qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f.*

3. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	Intervalle I	$f'(x)$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$acos(ax+b)$
$cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-a\ sin(ax+b)$
$tan(ax+b)$	$I \subset D_f$	$a\left(1+tan^2(ax+b)\right)$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f+g$	I	$f'+g'$
$\alpha f \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	I	$\alpha f'$
$f \times g$	I	$f' \times g + f \times g'$
$\dfrac{1}{f}$	Tout intervalle de $\{x \in I \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$	$\dfrac{-f'}{g^2}$
$\dfrac{f}{g}$	Tout intervalle de $\{x \in I \text{ tel que } g(x) \neq 0\}$	$\dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$
$f^n \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$	I	$nf'f^{n-1}$
$\dfrac{1}{f^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	Tout intervalle de $\{x \in I \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$	$\dfrac{-nf'}{f^{n+1}}$

II. Dérivées successives

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, sa fonction dérivée f' *est appelée dérivée première de f ou dérivée d'ordre 1 de f.*
Si f' *est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2, elle est notée* f'' ou $f^{(2)}$

D'une façon récurrente, si $f^{(n-1)}$ $(n \geq 2)$ *est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée* $n^{\text{ème}}$ *ou dérivée d'ordre n de f et notée* $f^{(n)}$

Exercice

Soit la fonction $f : x \mapsto \cos x$

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ *et pour tout rée x on a :*

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Solution

- *La fonction cosinus est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a pour tout réel x*

$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *donc l'égalité est vraie à l'ordre 0.*

- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *supposons que* $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ *et montrons que*

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-x - n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-x - n\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

III. Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant f(a).

Si f est dérivable en a et g est dérivable en f(a) alors la fonction composée gof est dérivable en a et on a : $(gof)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

Démonstration

Soit la fonction h définie sur J par : $\begin{cases} h(y) = \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & si \quad y \neq f(a) \\ h(f(a)) = g'(f(a)) & \end{cases}$

h est continue en f(a) car g est dérivable en ce point

f dérivable en a $\Rightarrow$ *f continue en a*

Donc $\lim\limits_{x \to a} h(f(x)) = h(f(a)) = g'(f(a))$

En plus, pour $x \neq a$ *on a :*

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \begin{cases} h(f(x)).\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si} \quad f(x) \neq f(a) \\ 0 & \text{si} \quad f(x) = f(a) \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ *car f est dérivable en a*

Donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = g'(f(a)) \times f'(a)$

Conséquence

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors gof est dérivable sur I et on a :

$\forall x \in I,\ (gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

Application (Dérivée de $\sqrt{f}$)

Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Si on pose $g(x) = \sqrt{x}$ alors $\sqrt{f} = gof$

$$\begin{cases} f \text{ dérivable sur I} \\ g \text{ dérivable sur }]0,+\infty[\\ f(I) \subset]0,+\infty[\text{ car f est strictement positive sur I} \end{cases}$$

Donc la fonction $\sqrt{f}$ $(= gof)$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I,\ \left(\sqrt{f}\right)'(x) = (gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = f'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Retenons

Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et pour tout $\forall x \in I,\ \left(\sqrt{f}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Exercice

Dans chacun des cas suivants donner le domaine de dérivabilité et définir la fonction dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ *b)* $f(x) = \cos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

Solution

a) Etudions le signe de $x^2 - 3x + 2$

On a $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$ *donc les racines de ce trinôme sont 1 et 2*

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $x^2 - 3x + 2$		+	0	$-$	0	+	

Pour tout $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[,\ \ x^2 - 3x + 2 > 0$

La fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ *est une fonction polynôme donc elle st dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier sur* $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

Alors la fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ *est dérivable et strictement positive sur* $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ *donc la fonction f est dérivable sur* $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ *et on a :*

$\forall x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[\;,\quad f'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$.

b) Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$. *On a* $f = \cos o g$

La fonction g est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *et* $g'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$

En plus la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ *donc* f *est dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *et* $f'(x) = g'(x) \times \left(-\sin\left(g(x)\right)\right) = \dfrac{2}{(x+1)^2} \sin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

IV. Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$ *et dérivable sur* $]a,b[$ *et telle que* $f(a) = f(b)$ *alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$

Démonstration

- *Si f est constante sur* $[a,b]$ *alors* $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in]a,b[$.
- *Si f n'est pas constante sur* $[a,b]$

f étant continue sur $[a,b]$ *donc* $f\left([a,b]\right) = [m, M]$ *et par suite il existe* α *et* β *de* $[a,b]$ *tels que* $f(\alpha) = m$ et $f(\beta) = M$

L'un au moins des réels α *et* β *appartient à l'intervalle* $]a,b[$ *car f n'est pas constante sur* $[a,b]$. *Supposons que* $\alpha \in]a,b[$

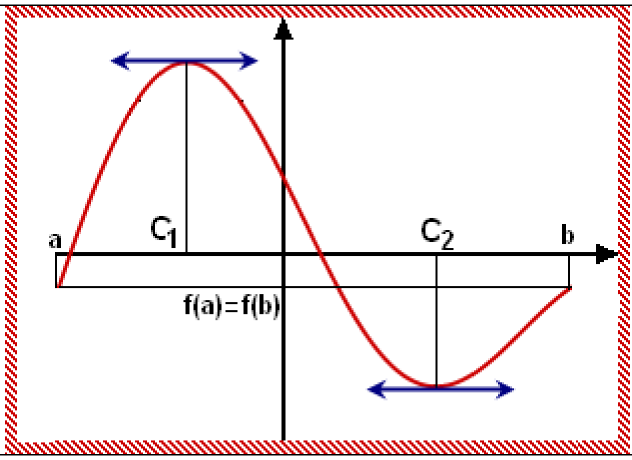
$$\forall x \in]a,\alpha[\;,\; \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{f(x)-m}{x-\alpha} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) \leq 0$$

$$\forall x \in]\alpha,b[\;,\; \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{f(x)-m}{x-\alpha} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) \geq 0$$

Ce qui donne $f(\alpha) = 0$. *Même raisonnement si on suppose que* $\beta \in]a,b[$.

Interprétation graphique

Si f est continue sur $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$ *alors sa courbe représentative admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses*



Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe au moins $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Démonstration

Posons $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ *pour tout* $x \in [a,b]$

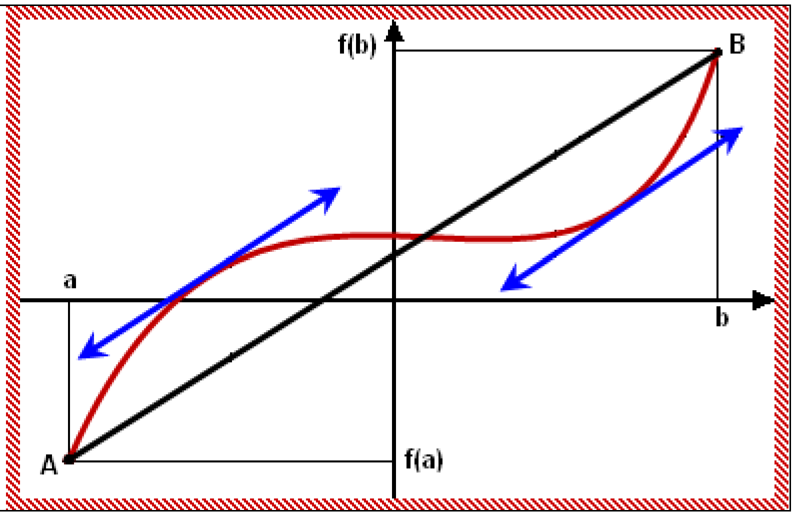
La fonction g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle donc il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$

g étant dérivable sur $]a,b[$ et pour tout $x \in]a,b[$, $g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Alors $g'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *donc* $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Interprétation graphique

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors sa courbe représentative admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB) où $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$



V. Inégalités des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a,b[$.

S'il existe deux réels m et M tels que $m \le f'(x) \le M$ pour tout $x \in]a,b[$ alors

$m(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a)$

Démonstration

La fonction f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis donc il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Or $m \le f'(c) \le M$ *et* $b-a>0$ *donc* $m(b-a) \le f'(c)(b-a) \le M(b-a)$

D'où $m(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a)$.

Corollaire

Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe $k \ge 0$ tel que $|f'(x)| \le k$ pour tout $x \in I$ alors pour tous réels a et b de I, $|f(b)-f(a)| \le k|b-a|$

Exercice

1) a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \leq \tan x$.

b) En déduire que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

2) a) Montrer que pour tous réels x et y de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $x < y$ on a:

$$\frac{y-x}{\cos^2 x} \leq \tan y - \tan x \leq \frac{y-x}{\cos^2 y}$$

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$.

Solution

1) a) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction tangente est dérivable sur l'intervalle $[0, x]$ et $\forall t \in [0, x], \tan'(t) = 1 + \tan^2 t$

On a $\forall t \in [0, x]$, $1 \leq \tan'(t) \leq 1 + \tan^2 x$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, $1.(x-0) \leq \tan x - \tan 0 \leq (1 + \tan^2 x)(x-0)$

D'où $\tan x \geq x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) \leq 0$

(d'après la question précédente) donc f est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2) a) La fonction tangente est dérivable sur l'intervalle $[x, y]$ et

$\forall t \in [x, y], \tan'(t) = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

$\forall t \in [x, y], x \leq t \leq y \Rightarrow 0 < \cos^2 y \leq \cos^2 t \leq \cos^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \leq \tan'(t) \leq \frac{1}{\cos^2 y}$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\frac{y-x}{\cos^2 x} \leq \tan y - \tan x \leq \frac{y-x}{\cos^2 y}$

b) Il suffit d'appliquer l'encadrement précédent sur l'intervalle $[0, x]$ où $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

VI. Sens de variations d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est strictement positive sur I alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est strictement négative sur I alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration

Soient a et b deux réels de I tels que $a \neq b$.

f est dérivable sur $[a,b]$ (ou $[b,a]$) donc il existe $c \in]a,b[$ (ou $c \in]b,a[$) tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \ \ldots$$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple

Considérons la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \cos x$.

f est dérivable sur $[0,\pi]$ et $f'(x) = -\sin x \leq 0$.

Donc f est décroissante sur $[0,\pi]$

Et puisque f' s'annule seulement en 0 et π (en un nombre fini de points) on peut dire que f est strictement décroissante sur $[0,\pi]$

Ce cours est destiné aux élèves des classes terminales section mathématiques conformément aux programmes officiels Tunisien.

Vos suggestions et vos remarques m'intéresse beaucoup et seront les bienvenus