Devoir de synthèse n°1 Classe: $4^{ième}$Sc2

Durée de l'épreuve : 2H Prof: Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

1) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=-2x^2-1+\ln x$.

a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de g. (On ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).

c) En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g(x)<0$

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

3) a) Calculer les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y=-x+1$ est une asymptote à la courbe C.

c) Étudier la position relative de C et Δ sur $]0,+\infty[$.

4) a) Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$.

c) Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1.

5) Tracer la droite Δ, la tangente T et la courbe C.

Exercice n°2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A(6,0,0) , B(0,6,0) , C(0,0,6) et D(2,2,2)

On note P et Q les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan (ABC)

2) a) Déterminer une équation cartésienne du plan P.

b) Vérifier que $x - z = 0$ est une équation cartésienne du plan Q.

c) Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta = P \cap Q$ et vérifier que $\Delta \cap (ABC) = \{D\}$

3) a) Montrer que si S est une sphère qui passe par les points A, B et C alors son centre I appartient à la droite Δ

b) En déduire qu'il existe une seule sphère S passant par les points A, B et C et tangente au plan R d'équation cartésienne $x + y - 8 = 0$

Donner son rayon et les coordonnées de son centre I.

Exercice n°3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on note S_m l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2my + 2mz - 4 = 0$

1) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le rayon r_m et les coordonnées de son centre I_m en fonction de m.

2) Montrer que toutes les sphères S_m passent par un cercle fixe que l'on déterminera.

3) Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m l'intersection de la sphère S_m avec le plan P d'équation cartésienne $x = 2$