

Devoir de synthèse n°1

Classe: 4^{ème} Sc2

Durée de l'épreuve : 2H

Prof: Dhaouadi Nejib



Exercice n°1

ID : DS0001

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

1°) Montrer que f est continue en 0

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu

3°) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b) Dresser le tableau de variation de f

4°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet, dans $]0, +\infty[$, une solution unique $\alpha \in]1,5, 1,6[$

Exercice n°2

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites réelles définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + 4v_n}{7} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 20 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$

1°) a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer w_n en fonction de n

2°) Montrer que pour tout entier naturel n ; $u_n \leq v_n$

3°) a) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante

a) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite L

4°) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 7u_n + 12v_n$

a) Montrer que (t_n) est une suite constante

b) En déduire alors la valeur de L

Exercice n°3 (Bac Tunisien 2003 sections Sc&T)

Soit m un réel non nul

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - (1 + m^2) = 0$

2°) Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$f(z) = z^3 - 3iz^2 - (3 + m^2)z + i(1 + m^2).$$

a) Vérifier que $f(i) = 0$; en déduire une factorisation de $f(z)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A , M' et M'' d'affixes respectives i , $i + m$ et $i - m$

a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M'']$.

b) Montrer que le triangle $OM'M''$ est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle $OM'M''$ soit équilatéral.

Exercice n°4

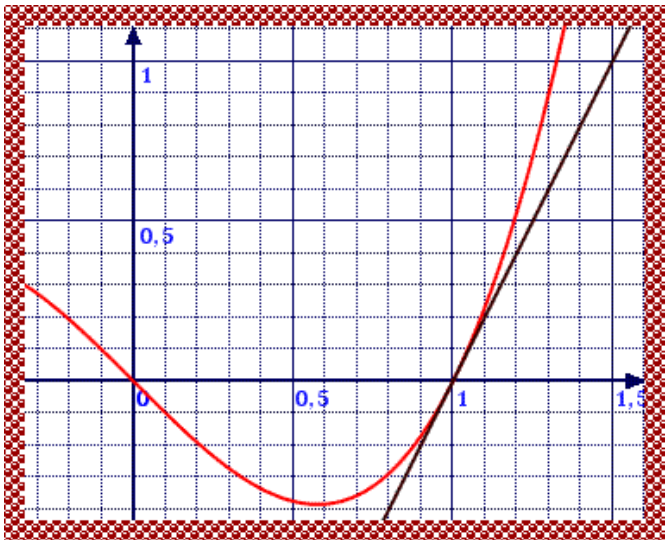
Pour chaque question, une seule des propositions données est correcte

L'élève doit cocher une seule des réponses données pour chaque question

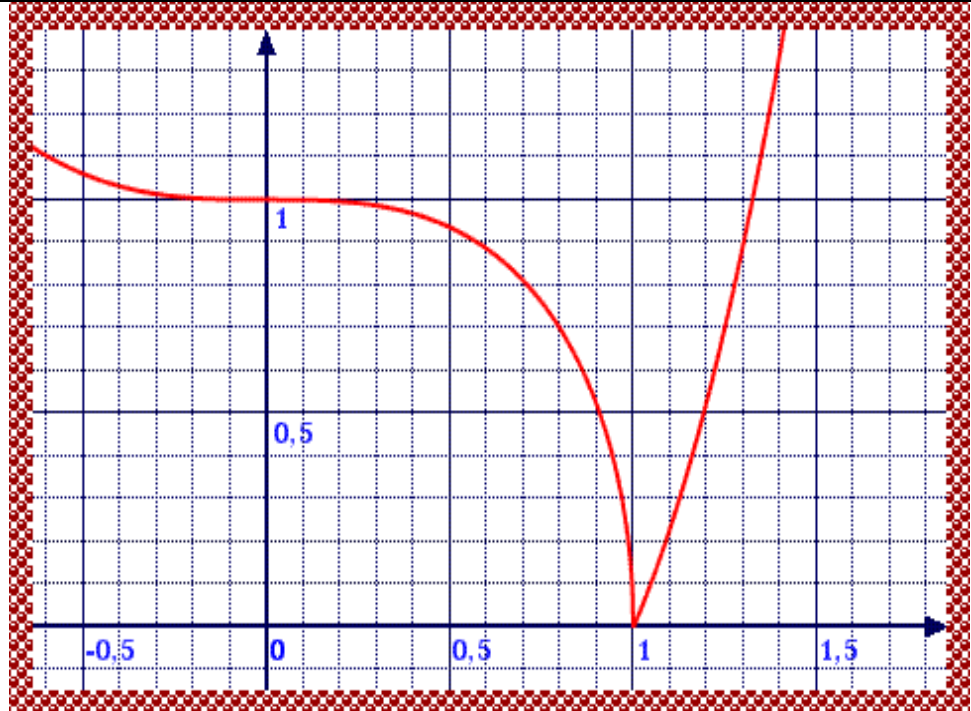
1 pt pour une bonne réponse , - **0,25 pt** pour une réponse fausse.

0 pt dans le cas d'une réponse ambiguë ou absence de réponse

Les notes pour cet exercice vont de 0 à 4.

1°) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f Déterminer $f'(1)$		
☐ $f'(1) = 0$	☐ $f'(1) = -2$	☐ $f'(1) = 2$
2°)		

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f



☐ f dérivable en 1

☐ f dérivable à gauche en 1 et n'est pas dérivable à droite en 1

☐ f dérivable à droite en 1 et n'est pas dérivable à gauche en 1

3°) Si (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$|u_n + 1| \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right), \text{ alors :}$$

☐ (u_n) n'est pas convergente

☐ (u_n) converge vers 1

☐ (u_n) converge vers 0

4°) Les racines quatrième de 16 sont de la forme :

☐ $z_k = 2e^{i\frac{k\pi}{2}}$
avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

☐ $z_k = 2e^{i\frac{k\pi}{4}}$
avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

☐ $z_k = \sqrt{2}e^{i\frac{k\pi}{2}}$
avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$



Correction de l'exercice n°1

$$1^{\circ}) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 - \sqrt{x^2 - x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f = 2. \text{ et on a: } f(0) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = f(0) \Rightarrow f \text{ continue en } 0.$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ}) \quad * \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \sqrt{x^2 - x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x^2 - x}{x\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - x}} = +\infty. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à gauche en 0 et la Courbe de f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} = 0 \end{aligned}$$

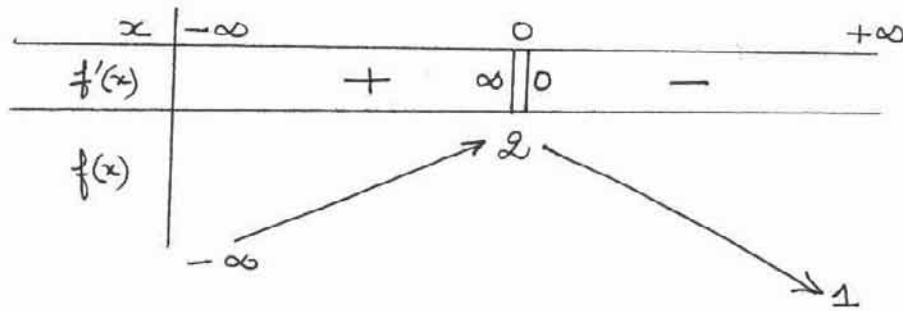
$\Rightarrow f$ dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$ et la Courbe de f admet, à droite, au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

$$3^{\circ}) \text{ a) Pour } x \in]0, +\infty[\text{ on a: } f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{b) Pour } x \in]-\infty, 0[; f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x^2 - x}} \text{ si } x < 0 \\ f'(x) &= \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \text{ si } x > 0 \end{aligned} \right.$$



- 4°) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.
 g dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ (car $f'(x) < 0$ par $x > 0$)
 $\Rightarrow g$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. ①
 en plus on a : $g(1,5) \cdot g(1,6) =$
 donc il existe $\alpha \in]1,5; 1,6[$ tq $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$
 d'après ① α est unique dans $]0, +\infty[$.

Correction de l'exercice n°2

- 1°) a) $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{3u_n + 4v_n}{7} = \frac{7u_n + 14v_n - 9u_n - 12v_n}{21}$
 $= \frac{-2u_n + 2v_n}{21} = \frac{2}{21}(v_n - u_n) = \frac{2}{21}w_n$.
 $\Rightarrow (w_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{21}$ et de 1^{er} terme $w_0 = 19$
 b) Pour tout entier naturel n ; $w_n = 19 \cdot \left(\frac{2}{21}\right)^n$.
 2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $v_n - u_n = w_n = 19 \cdot \left(\frac{2}{21}\right)^n > 0 \Rightarrow u_n \leq v_n$
 3°) a) $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{7}(v_n - u_n) = \frac{4}{7}w_n > 0 \Rightarrow (u_n)$ croissante.
 $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}(v_n - u_n) = -\frac{1}{3}w_n < 0 \Rightarrow (v_n)$ décroissante.
 b) $\left\{ \begin{array}{l} * \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N} ; u_n \leq v_n \\ * (u_n) \text{ croissante et } (v_n) \text{ décroissante.} \\ * \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-w_n) = 0 \text{ car } \frac{2}{21} \in]-1, 1[\end{array} \right.$
 $\Rightarrow (u_n)$ et (v_n) sont deux suites adjacentes.

(u_n) et (v_n) sont adjacentes $\Rightarrow (u_n)$ et (v_n) sont convergentes et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = L$

4°) a) $t_{n+1} = 7u_{n+1} + 12v_{n+1} = 3u_n + 4v_n + 4(u_n + 2v_n)$

$= 7u_n + 12v_n = t_n \Rightarrow (t_n)$ est une suite constante.

b) (t_n) suite constante $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0 = 7u_0 + 12v_0 = 247$.

d'autre part : $\begin{cases} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}; t_n = 7u_n + 12v_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = L \end{cases}$

donc $7L + 12L = 247 \Rightarrow L = \frac{247}{19} = 13$.

Correction de l'exercice n°3

1°) $\Delta = (-2i)^2 + 4(1+m^2) = -4 + 4 + 4m^2 = 4m^2 = (2m)^2$.

les solutions : $z' = \frac{2i + 2m}{2} = i + m$ et $z'' = \frac{2i - 2m}{2} = i - m$.

2°) a) $f(i) = i^3 - 3i \cdot i^2 - (3 + m^2)i + i(1 + m^2)$
 $= -i + 3i - 3i - im^2 + i + im^2 = 0$.

$f(i) = 0 \Rightarrow f(z)$ est factorisable par $z - i$.

$\forall z \in \mathbb{C}; f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes.

$\forall z \in \mathbb{C}; f(z) = az^3 + bz^2 + cz - ia z^2 - ibz - ic$
 $= az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - ia = -3i \\ c - ib = -3 - m^2 \\ -ic = i(1 + m^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2i \\ c = -(1 + m^2) \\ c - ib = -1 - m^2 - 2 = -3 - m^2 \text{ vrai.} \end{cases}$

Donc $f(z) = (z - i)(z^2 - 2iz - (1 + m^2))$.

$$b) f(z)=0 \Leftrightarrow z=i \text{ ou } z^2-2iz-(1+m^2)=0$$

$$\Leftrightarrow z=i \text{ ou } z=z' \text{ ou } z=z''. \text{ (voir 1°) }.$$

$$S_C = \{ i, i-m, i+m \}.$$

$$3^{\circ}) a) \frac{Aff(M') + Aff(M'')}{2} = \frac{i+m + i-m}{2} = i = Aff(A)$$

$$\text{donc } A = M' * M''.$$

$$b) \left. \begin{array}{l} OM' = |i+m| = \sqrt{m^2+1} \\ OM'' = |i-m| = \sqrt{m^2+1} \end{array} \right\} \Rightarrow OM' = OM'' \Rightarrow OM'M'' \text{ isocèle.}$$

c) Le triangle $OM'M''$ est équilatéral ssi $OM' = OM'' = M'M''$.

$$\text{équivalent à } M'M'' = \sqrt{1+m^2} \Leftrightarrow 2|m| = \sqrt{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow 1+m^2 = 4m^2 \Leftrightarrow 3m^2 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } m = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$