Devoir de contrôle n°3 **Classe:** $4^{ième}$Sc2

Durée de l'épreuve : 2H **Prof:** Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} + 2$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - x)e^x + 1$.

a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1{,}2\ ;\ 1{,}3[$.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe C_f.

c) Étudier la position de C_f par rapport à Δ.

4) a) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

b) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

5) Tracer la droite Δ et la courbe C_f.

6) Pour tout entier naturel n, tel que $n \geq 2$, on note A_n l'aire la région du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 2$; $x = n$ et $y = 2$ (en unité d'aire)

a) Démontrer que pour tout x , tel que $x \geq 2$, on a : $\dfrac{7}{8}xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x + 1} \leq xe^{-x}$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_2^n xe^{-x}dx$ en fonction de n.

c) Donner un encadrement de A_n en fonction de n.

Exercice n°2

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$
Il y a trois boules noires dans U_1, deux boules noires dans U_2 et une boule noire dans U_3. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher. Une partie se déroule de la manière suivante :

Le joueur lance le dé

- S'il obtient le numéro 1, il tire au hasard une boule de l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1
- S'il obtient un multiple de 3, il tire au hasard une boule de l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans U_2
- Si le numéro obtenu n'est ni 1 ni un multiple de 3, il tire au hasard une boule de l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans U_3

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : «Le dé amène le numéro 1»

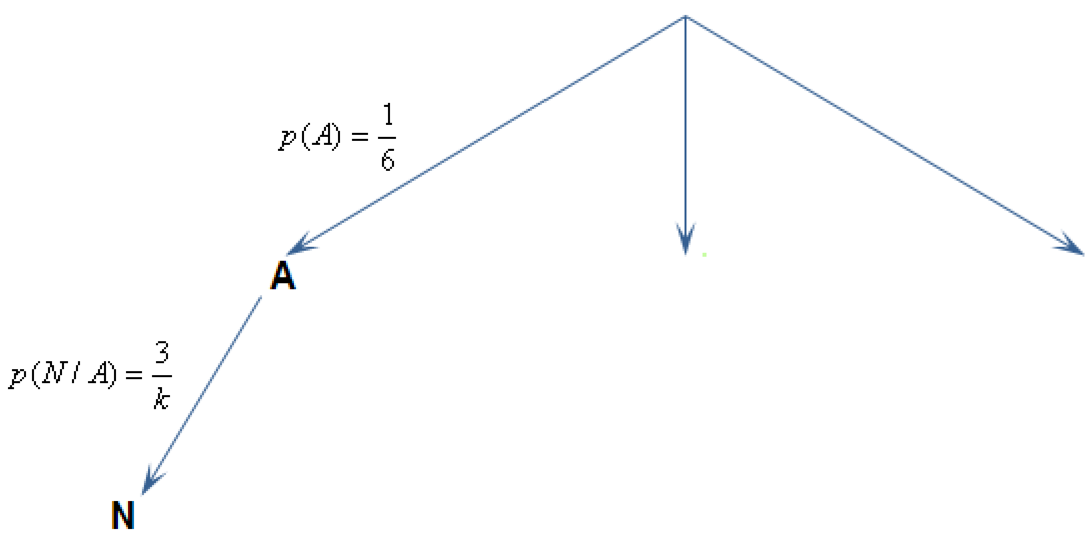
B : «Le dé amène un multiple de 3»

C : «Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3»

N : «La boule tirée est noire»

1) Le joueur joue une partie.

a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivante :



b) Déterminer $p(A \cap N)$, $p(B \cap N)$ et $p(C \cap N)$

c) Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

d) Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

e) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure ou égale à $\frac{1}{3}$.

2) Dans cette question on prendra $k = 5$

Le joueur fait dix parties, indépendantes les unes des autres.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de boules noires tirées après les dix tirages.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de X

BON TRAVAIL