Devoir de controle n°2 **Classe:** 4ième Sc2

Durée de l'épreuve : 2H **Prof:** Dhaouadi Nejib

SIGMATHS

Exercice n°1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Considérons le cercle (C) de centre O et de rayon 1 et les points $A(1,0)$ et $A'(-1,0)$

Soit H un point du segment $[AA']$ distinct de A et A'. La perpendiculaire à (AA') passant par H coupe le cercle (C) en deux points M et M'.

On désigne par f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$

1) On pose $\overline{OH}=x$ et on désigne par $A(x)$ l'aire du triangle AMM'.

   Montrer que pour tout $x\in\,]-1,1[\;,\; A(x)=f(x)$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1 et interpréter les résultats trouvés.

   b) Montrer que pour tout $x\in\,]-1,1[\;,\; f'(x)=\dfrac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

   c) Dresser le tableau de variation de f

   d) Montrer que si l'aire A(x) est maximale alors le triangle AMM' est équilatéral.

3) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f dans un autre repère orthonormé.

4) Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2-(1-x)^2(1-x^2)=0$

   a) Montrer que $(\Gamma)=(\mathscr{C})\cup(\mathscr{C}')$ où $(\mathscr{C}')$ est une courbe que l'on précisera

   b) Tracer (Γ) dans le même repère que $(\mathscr{C})$

Exercice n°2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ et $C(0,1,3)$

1) a) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

   b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   c) Montrer que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne

      $9x+6y+4z-18=0$

2) Calculer le volume du tétraèdre OABC

3) a) Calculer l'aire du triangle ABC

b) Calculer la distance du point O au plan (ABC)

c) Retrouver le volume du tétraèdre OABC

Exercice n°3

Soit ABC un triangle de l'espace

On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$

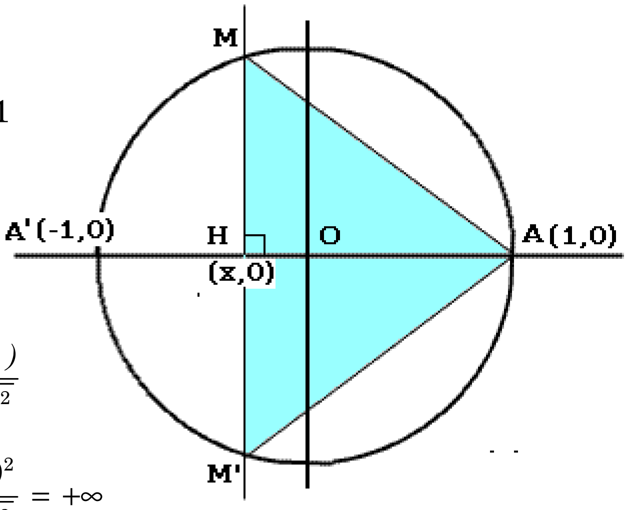
2) En déduire que : $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$

Correction du devoir de controle n°2

Classe: $4^{ième}$Sc2

Exercice n°1

1) $A(x)=\frac{1}{2}AH\times MM'$ avec $AH=|1-x|$



Le cercle (C) admet pour équation $x^2+y^2=1$

Or $M\in(C)$ donc $M(x,\sqrt{1-x^2})$

et $MM'=2HM=2\sqrt{1-x^2}$

d'où $A(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}=f(x)$

2) a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{(1-x)(1-x^2)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(1-x)(1-x)(1+x)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droite en -1 et la courbe de f admet au point d'abscisse -1 une demi tangente verticale

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{(x-1)}=\lim_{x\to1^-}-\sqrt{1-x^2}=0$$

donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1)=0$ et la courbe de f admet au point d'abscisse 1 une demi tangente horizontale

b) Pour tout $x\in\,]-1,1[$, on a :

$$f'(x)=-\sqrt{1-x^2}+(1-x)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-(1-x^2)-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

c)

x	-1		-1/2		1
$f'(x)$	∞	+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

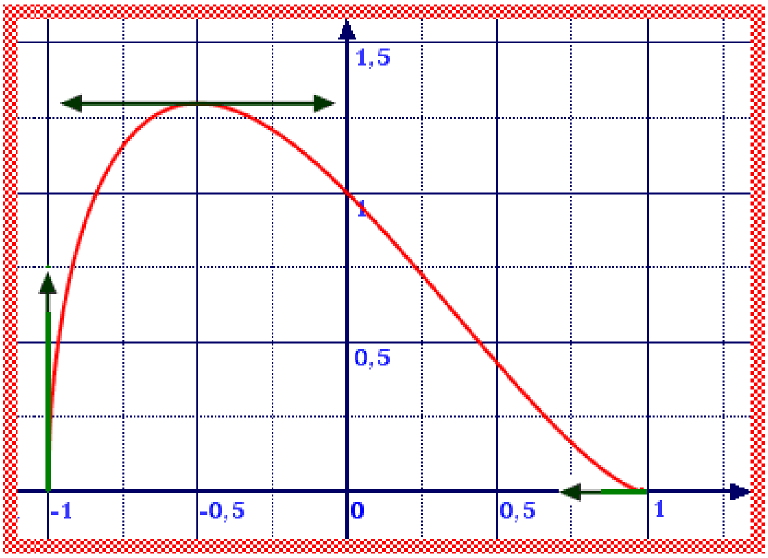
d) $A(1,0)$, $M(x,\sqrt{1-x^2})$ et $M'(x,-\sqrt{1-x^2})$

A(x) est maximale pour $x=-\frac{1}{2}$ donc $M\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $M'\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$AM=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3} \quad , \quad AM'=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$

$MM'=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$. AM=AM'=MM' donc le triangle AMM' est équilatéral

3) Courbe représentative de f



4) Soit (Γ) la courbe d'équation

$y^2-(1-x)^2(1-x^2)=0$

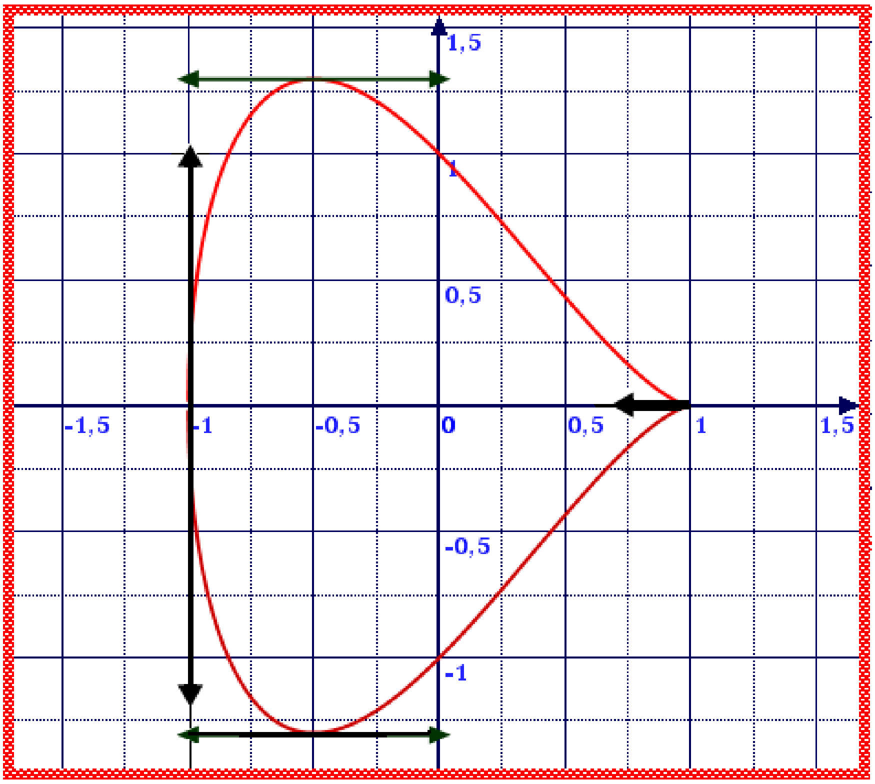
$M(x,y)\in(\Gamma)$

a) $\Leftrightarrow y^2=(1-x)^2(1-x^2)=(f(x))^2$

$\Leftrightarrow y=f(x)$ ou $y=-f(x)$

$\Leftrightarrow M\in(\mathscr{C})\cup(\mathscr{C}')$ où $(\mathscr{C}')$ est le symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'axe des abscisses

b)



Exercice n°2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ et $C(0,1,3)$

1) a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\6\\4\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

c) $A(2,0,0)$; $9\times 2 + 6\times 0 + 4\times 0 - 18 = 0$ donc $A \in (ABC)$

$B(0,3,0)$; $9\times 0 + 6\times 3 + 4\times 0 - 18 = 0$ donc $B \in (ABC)$

$C(0,1,3)$; $9\times 0 + 6\times 1 + 4\times 3 - 18 = 0$ donc $C \in (ABC)$

En plus les points A,B et C ne sont pas alignés d'où $9x + 6y + 4z - 18 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Le volume du tétraèdre OABC $= \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\bullet\overrightarrow{AO}\right| = \left|9\times(-2) + 6\times 0 + 4\times 0\right| = 3$

3) a) L'aire du triangle ABC $= \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{9^2 + 6^2 + 4^2} = \dfrac{\sqrt{133}}{2}$

b) $d(O, (ABC)) = \dfrac{\left|9\times 0 + 6\times 0 + 4\times 0 - 18\right|}{\sqrt{9^2 + 6^2 + 4^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{133}}$

Le volume du tétraèdre OABC

c) $= \dfrac{1}{3}\times(\text{L'aire du triangle ABC})\times(\text{La hauteur issue de O})$

$= \dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{133}}{2}\times\dfrac{18}{\sqrt{133}} = 3$

Exercice n°3

1) Montrons que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} \wedge \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB} \wedge \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{BC} \wedge \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

2)

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$ donc $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right\|$

$\Leftrightarrow AB \times AC \times \sin \widehat{BAC} = BC \times BA \times \sin \widehat{ABC} \Leftrightarrow b \sin \alpha = a \sin \beta$

$\Leftrightarrow \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{a}{\sin \alpha}$ $\quad (*)$

$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$ donc $\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\right\|$

$\Leftrightarrow \mathrm{BC} \times \mathrm{BA} \times \sin\widehat{\mathrm{ABC}} = CA \times CB \times \sin \widehat{ACB} \Leftrightarrow c \sin \beta = b \sin \gamma$

$\Leftrightarrow \dfrac{c}{\sin \gamma} = \dfrac{b}{\sin \beta}$ $\quad (**)$

$(*)$ et $(**) \Rightarrow \dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$