

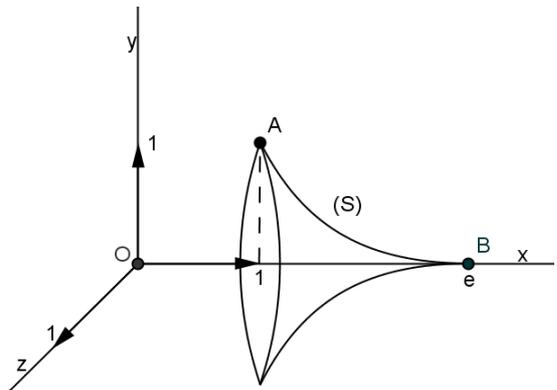


### Exercice 3: (5 points)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner l'arc  $\widehat{AB}$  de la courbe d'équation  $y = (1 - \ln x)^2$ ,  $x \in [1, e]$  au tour de l'axe  $(O, x)$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $a_n = \int_1^e (1 - \ln(x))^n dx$

- 1) Calculer  $a_1$
- 2) En utilisant une intégration par parties, Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_{n+1} = -1 + (n+1)a_n$
- 3) Calculer  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$
- 4) Calculer alors le volume  $\mathcal{V}$  du solide (S)



### Exercice 4: (6 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par 
$$\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que  $f$  est dérivable à droite en 0.  
b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) La courbe (C) (donnée dans la page 3) est la représentation graphique de la fonction  $f$ , dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et (T) la tangente à (C) au point A d'abscisse 1.  
Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :
  - a) Donner  $f'(e)$ ,  $f'(1)$  et  $f''(1)$
  - b) Soit  $\bar{f}$  la valeur moyenne de  $f$  sur  $[0;1]$ . Donner un encadrement de  $\bar{f}$ .
- 3) Soit (C') la parabole d'équation  $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ 
  - a) Déterminer l'intersection de (C) et (C')
  - b) Etudier la position de (C) par rapport à (C') sur  $]0, +\infty[$  et tracer (C') dans le même repère
- 4) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^e x^2(1 - \ln x) dx$ 
  - a) Interpréter graphiquement  $I_n$  (On précisera cette interprétation sur le graphique)
  - b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $I_n = \frac{e^3}{9} - \frac{4}{9n^3} - \frac{\ln(n)}{3n^3}$
  - c) En déduire l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = e$

# Feuille à rendre avec la copie

Nom : .....

Prénom : .....

Classe : 4 sciences expérimentale 1

