Devoir de contrôle n°1

✧✧✧

Date : 15/11 - 2011 Durée: 2 heures

✧✧✧

Sections : 4ème Sciences expérimentales

Prof: Missaoui Taoufik

Exercice 01(3pts)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

(1) Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} (n-1)\sin\left(\dfrac{\pi}{n-1}\right)$ alors

(a) $\ell = 0$ (b) $\ell = \pi$ (c) $\ell = 1$

(2) Soit z un nombre complexe non nul d'argument $-\dfrac{\pi}{3}$ alors un argument de $\dfrac{i}{\overline{z}}$ est

(a) $\dfrac{\pi}{6}$ (b) $\dfrac{5\pi}{6}$ (c) $-\dfrac{\pi}{6}$

(3) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ et telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$
Soit N le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0,1]$ alors

(a) $N \geq 1$ (b) $N = 1$ (c) $N = 0$

Exercice 02 (5pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.On considère les points A, B, C et D

d'affixes respectives $a = i$, $b = e^{-i\theta}$, $c = 2i + e^{i\theta}$ et $d = 2\cos\theta + i$ avec $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$

(1) (a) Vérifier que $b - a = \overline{c - a}$. En déduire que $AB = AC$

(b) Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un losange

(2) (a) Montrer que $c - a = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

(b) En déduire la valeur de θ pour laquelle $ABDC$ soit un carré

(c) Construire le carré $ABDC$ pour la valeur de θ trouvée.

Exercice 03 (5pts)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$, $n \geq 1$

(1) (a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 4$, $(n+1)^2 \leq 2n^2$

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n \leq 1$

(c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n}$

(2) (a) Montrer que $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{3}{4}$ pour tout entier $n \geq 5$

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 5$, $0 < u_n \leq u_5\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}$

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

© www.sigmaths.tk == www.sigmaths.tk == www.sigmaths.tk

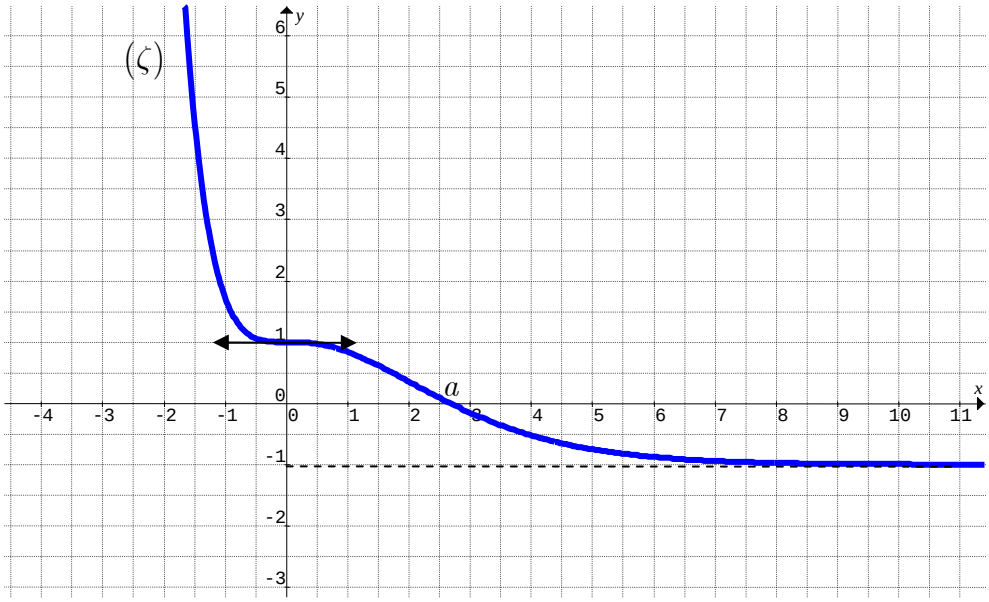
Exercice 4(7points)

I- Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

On a représenté ci-dessous la courbe représentative (ζ) d'une fonction f définie et continue sur IR

On précise que:

- La courbe (ζ) admet une asypmtote d'équation $y=-1$ au voisinage de $+\infty$
- La courbe (ζ) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$
- La courbe (ζ) coupe l'axe $(O,\vec{i})$ en un point $A(a,0)$



(1) Déterminer graphiquement $f(IR)$, $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{ax^2}{1+x^2}\right)$

(2) Déterminer graphiquement le sens de variation de f

(3) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=f(x)-x$

(a) Utiliser le graphique pour déterminer le signe de $g(0)\times g(1)$

(b) Montrer alors qu'il existe un unique réel λ dans $]0,1[$ tel que $f(\lambda)=\lambda$

II- Soit h la fonction définie sur IR par

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad x\geq 0 \\ 1+x\,sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & si \quad x<0 \end{cases}$$

(1) Montrer que pour tout $x<0$ on a $1+x\leq h(x)\leq 1-x$

(2) Montrer alors que h est continue en 0

(3) Pour tout $x<0$, calculer $h\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puis déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

© www.sigmaths.tk == www.sigmaths.tk == www.sigmaths.tk