Lycée Bechri A.S :2011/2012 Prof :Lahmadi.A	**Devoir de Contrôle N°1**	Niveau : 4Sc-Exp Durée : 2 heures Date :17/11/2011

Mathématiques

Exercice N°1

(3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie . Aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte vaut 1 point , une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point .

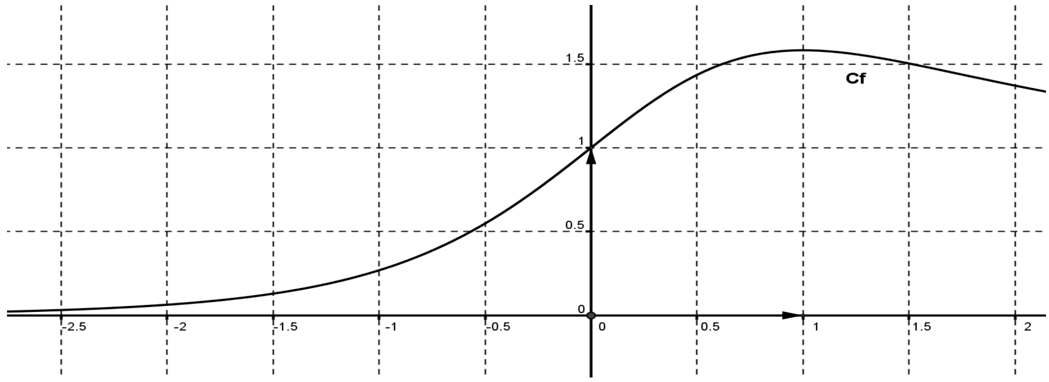
❶ La partie imaginaire du nombre complexe $z=(1-i)^2$ est :

a) -2 b) -2i c) -1

❷ On considère une suite (U_n) <u>convergente</u> définie sur $\mathbb{N}$ et on définit la suite (V_n) par : $V_n=\dfrac{-2}{U_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors la suite (V_n) est :

a) Convergente b) divergente c) on ne peut rien dire

❸ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont sa courbe représentative est donnée ci-dessous



alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{-x^2+3x-1}{x+5}\right)=$

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

Exercice N°2

(6 points)

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies par:

$$\begin{cases}U_0=1\\V_0=2\end{cases}\quad \text{et pour tout } n\in\mathbb{N},\quad U_{n+1}=\frac{3U_n+V_n}{4}\quad,\quad V_{n+1}=\frac{U_n+3V_n}{4}$$

❶ Calculer U_1 et V_1

❷ On pose pour tout entier n: $W_n=U_n-V_n$

a) Prouver que (W_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) En déduire que pour tout entier n , $U_n<V_n$

❸ a) Etudier la monotonie de chacune des suites (U_n) et (V_n) .

b) En déduire que pour tout entier n, $U_n \geq 1$ et $V_n \leq 2$.

c) Justifier que (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite L .

❹ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_n = U_n + V_n$

a) Prouver que (A_n) est une suite constante .

b) Calculer alors L.

Exercice N°3

(6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle J le point d'affixe i.

❶ On considère les points A, B, C, H d'affixes respective $a = -3 - i$, $b = -2 + 4i$, $c = 3 - i$ *et* $h = -2$

Placer ces points sur une graphique, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

❷ Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

❸ Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe : $\dfrac{b-c}{h-a}$.

En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

❹ On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G

Placer G sur la figure .

❺ Montrer que les points : G, J et H sont alignés.

❻ On note A' le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AH]$. Le point A' a pour affixe $a' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

a) Déterminer l'affixe du point K.

b) Démontrer que le quadrilatère KHA'J est un parallélogramme.

Exercice N°4

(5 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(\pi x)}{x-1} & si\ x < 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} - x & si\ x \geq 1 \end{cases}$

❶ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

❷ Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, on a : $\dfrac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

❸ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

❹ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$.

b) En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1 - \alpha^2}$

❺ Soit g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & si\ x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2} & si\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Bon travail