Durée de l'épreuve : 2H

Devoir de contrôle n°1

Classe : 4M2

Prof: Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

Soit (u_n) la suite réelle, à termes positifs, définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{1+u_n^2}}{u_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $\sqrt{2} \le u_n \le 1+\sqrt{2}$

Ind : On pourra écrire $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + \sqrt{1+\left(\dfrac{1}{u_n}\right)^2}$

2) a)Montrer que pour tout entier naturel n, $\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right| = \dfrac{2\left|u_n-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u_n}$

b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u_n \ge \sqrt{6}$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right| \le k\left|u_n-\sqrt{3}\right|$ où k est un réel de l'intervalle $]0,1[$ que l'on précisera.

c) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n-\sqrt{3}\right| \le k^n\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $u_n = \tan x_n$

a) Vérifier que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2 x}}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = -\dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{\pi}{2}$.

c) On pose $y_n = x_n - \dfrac{\pi}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Vérifier que (y_n) est une suite géométrique. Déterminer alors les limites de y_n et puis de x_n

d) Retrouver le résultat de 2) d).

Exercice n°2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) On désigne par (E) l'équation $z^2 - 2iz - 2 = 0$

a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

b) Mettre chacune des solutions trouvées sous forme exponentielle.

2) Montrer que pour tous réels a et b ,

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad \text{et} \quad e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

3) Soient $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation (E_θ) : $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$

a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

b) Mettre chacune des solutions trouvées sous forme exponentielle.

4) On note A et B les images des solutions de l'équation (E_θ)

a) Montrer que les points O,A et B ne sont pas alignés

b) Montrer que le triangle OAB est rectangle.

c) Trouver la valeur de θ pour laquelle OAB est un triangle isocèle.

Formules utiles :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Solution

Exercice n°1

1) On procède par récurrence.

On note P(n) la propriété « $\sqrt{2} \le u_n \le 1+\sqrt{2}$ »

- P(0) est vraie, en effet $u_0 = \sqrt{2} \in \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}+1\right]$
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P(n) est vraie et montrons que P(n+1) est aussi vraie

$$\sqrt{2} \le u_n \le \sqrt{2}+1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+1} \le \frac{1}{u_n} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 \le \left(\frac{1}{u_n}\right)^2 \le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4-2\sqrt{2} \le 1+\left(\frac{1}{u_n}\right)^2 \le \frac{3}{2} \Rightarrow 1 < \sqrt{4-2\sqrt{2}} \le \sqrt{1+\left(\frac{1}{u_n}\right)^2} \le \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} 1 \le \sqrt{1+\left(\frac{1}{u_n}\right)^2} \le \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \le \frac{1}{u_n} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow 1+\sqrt{2}-1 \le \frac{1}{u_n} + \sqrt{1+\left(\frac{1}{u_n}\right)^2} \le \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$Or \ \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2}+1) = \frac{\sqrt{3}+1-2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{2}+1$$

Ce qui donne $\sqrt{2} \le \frac{1}{u_n} + \sqrt{1+\left(\frac{1}{u_n}\right)^2} \le \sqrt{2}+1$ ou encore $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le \sqrt{2}+1$.

2) a) $$u_{n+1}-\sqrt{3} = \frac{1+\sqrt{1+u_n^2}}{u_n} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{1+u_n^2}+\left(1-\sqrt{3}u_n\right)}{u_n} = \frac{1+u_n^2-\left(1-\sqrt{3}u_n\right)^2}{u_n\left(\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u_n\right)}$$

$$= \frac{1+u_n^2-1+2\sqrt{3}u_n-3u_n^2}{u_n\left(\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u_n\right)} = \frac{2\sqrt{3}u_n-2u_n^2}{u_n\left(\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u_n\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3}-u_n\right)}{\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u_n}$$

D'où $$\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right| = \frac{2\left|u_n-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u_n}$$

b) On a $\sqrt{1+u_n^2}-1 \ge 0 \Rightarrow \sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u_n \ge \sqrt{3}u_n$ et $\sqrt{3}u_n \ge \sqrt{6}$ car $u_n \ge \sqrt{2}$

Donc $\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u \ge \sqrt{6}$

c) $$\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u \ge \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u} \le \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{2\left|u_n-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u} \le \frac{2}{\sqrt{6}}\left|u_n-\sqrt{3}\right|$$

Donc $$\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right| = \frac{2\left|u_n-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+u_n^2}-1+\sqrt{3}u} \le k\left|u_n-\sqrt{3}\right| \quad \text{avec } k = \frac{2}{\sqrt{6}} \in \left]0,1\right[$$

c) Soit P(n) la propriété « $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \le k^n\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ »

- P(n) est vraie car $\left|u_0 - \sqrt{3}\right| = k^0\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P(n) est vraie et montrons que P(n+1) est aussi vraie
  $\left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \le k\left|u_n - \sqrt{3}\right| \le k.k^n\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = k^{n+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \Rightarrow$ P(n+1) est vraie
- **Conclusion** : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - \sqrt{3}\right| \le k^n\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

d) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \sqrt{3}\right| \le k^n\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ et en plus $k \in \left]-1,1\right[$ donc $\lim k^n\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = 0$

D'où la suite (u_n) est convergente et $\lim u_n = \sqrt{3}$

3) a) Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $1+\sqrt{1+\tan^2 x} = 1+\frac{1}{\cos x} = \frac{1+\cos x}{\cos x}$

Donc $$\frac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

b) $u_{n+1} = \tan x_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{1+\tan^2 x_n}}{\tan x_n} = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{x_n}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x_n}{2}\right)$ avec x_n et $x_{n+1} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

En plus $0 < x_n < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -x_n < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \pi - x_n < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{x_n}{2} < \frac{\pi}{2}$

Ce qui permet de dire $x_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{x_n}{2}$ ou encore $x_{n+1} = -\frac{x_n}{2} + \frac{\pi}{2}$

c) $y_{n+1} = x_{n+1} - \frac{\pi}{3} = -\frac{x_n}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{x_n}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}\left(x_n - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}y_n$

Donc (y_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

Et $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n y_0$ et $x_n = y_n + \frac{\pi}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n y_0 + \frac{\pi}{3}$

$-\frac{1}{2} \in \left]-1,1\right[\Rightarrow \lim\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim x_n = \frac{\pi}{3}$.

En plus la fonction tangente est continue en $\frac{\pi}{3}$, alors

$$\lim u_n = \lim \tan x_n = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Exercice n°2

1) a) $z^2 - 2iz - 2 = 0$; $\Delta = -4 + 8 = 4 = 2^2$ donc les solutions de cette équation sont :

$$z' = \frac{2i-2}{2} = i - 1 \quad \text{et} \quad z'' = \frac{2i+2}{2} = i + 1$$

b) $$i - 1 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$i + 1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2)

$$e^{ia} + e^{ib} = \cos a + i \sin a + \cos b + i \sin b = (\cos a + \cos b) + i(\sin a + \sin b)$$

$$= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{ia} + e^{i(b+\pi)} = 2\cos\left(\frac{a-b-\pi}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b+\pi}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2} - \frac{\pi}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

3) a) $\Delta = -4 + 4\left(1 + e^{2i\theta}\right) = 4e^{2i\theta} = \left(2e^{i\theta}\right)^2$ donc les solutions sont :

$$z' = \frac{2i - 2e^{i\theta}}{2} = i - e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{2i + 2e^{i\theta}}{2} = i + e^{i\theta}$$

b) $$z' = i - e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\theta} = 2i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}\right)} = 2i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$ avec $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) > 0$ car $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$z'' = i + e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

avec $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) > 0$ car $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

4) a) $\dfrac{Aff(\overrightarrow{OA})}{Aff(\overrightarrow{OB})} = \dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \notin \mathbb{R}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires ce qui prouve que O,A et B ne sont pas alignés

b) $\dfrac{Aff(\overrightarrow{OA})}{Aff(\overrightarrow{OB})} = i\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ qui est imaginaire donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux

D'où le triangle OAB est rectangle en O.

c) OAB isocèle $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow |z'| = |z''| \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$

car $\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Ce qui conduit à $\theta = 0$.