Epreuve

Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°1

Classe : 4ème ScExp

Novembre 2015

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1

Une seule des trois propositions suivantes est exacte, le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

2) Si z est un nombre complexe non nul d'argument θ alors un argument de $\dfrac{\overline{z}}{\sqrt{3}-i}$ est :

a) $\dfrac{\pi}{6}-\theta$ b) $-\dfrac{\pi}{6}-\theta$ c) $\dfrac{\pi}{6}+\theta$

3) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) = x-\sqrt{x^2+1}$ alors :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (gof)(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (gof)(x) = 0$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (gof)(x) = -\infty$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \le u_n \le 1$.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|u_{n+1}-1| \le \dfrac{1}{2}|u_n-1|$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_n-1| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) Retrouver alors la limite de la suite (u_n).

4) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Exprimer v_n et puis u_n en fonction de n.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points A, B, E et F d'affixes respectives 1, $1+e^{i\frac{\pi}{3}}$, $1+z_B{}^2$ *et* 2

On note $\mathscr{C}$ *le cercle de centre A et de rayon 1.*

1) a) *Vérifier que* $B \in \mathscr{C}$.

b) *Déterminer un argument de* $\dfrac{z_B - z_A}{z_F - z_A}$. *En déduire la nature du triangle ABF.*

2) a) *Montrer que pour tout réel* $\theta \in \left]0,\pi\right[$, $1+e^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) *Déterminer alors la forme exponentielle de* z_B.

c) *Montrer que les points A, B et E sont alignés.*

3) *Pour tout nombre complexe* $z \neq 1$, *on considère les points M et M' d'affixes respectives* z *et* $1+z^2$.

Montrer que $\dfrac{z^2}{z-1}$ *est réel si et seulement si A, M et M' sont alignés.*

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = 3x + \sin x - 1$.

1) a) *Montrer que pour tout réel x, on a :* $3x - 2 \le f(x) \le 3x$.

En déduire les limites de f en $-\infty$ *et* $+\infty$.

b) *Déterminer* $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$.

2) a) *Montrer que l'équation* $(E) :\ 3x = 1 - \sin x$ *admet, dans* $\mathbb{R}$, *une solution unique* $\alpha \in \left]0,\dfrac{\pi}{6}\right[$.

b) *Donner le signe de f sur* $\mathbb{R}$.

3) *Montrer que la fonction g définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :* $g(x) = \dfrac{1+f(x)}{x}$ *est prolongeable par continuité en 0 et définir son prolongement h.*

SIGMATHS©2015

Correction du devoir de contrôle n°1 4sc 2015-2016

Exercice 1

1) $\boxed{Reponse\ a)\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{n}$ avec $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) $\boxed{Reponse\ a)\ \frac{\pi}{6} - \theta}$

$$\left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2 \Rightarrow z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \left[2, -\frac{\pi}{6}\right]$$

$$\arg\left(\frac{\overline{z}}{\sqrt{3} - i}\right) \equiv \arg(\overline{z}) - \arg(\sqrt{3} - i) \quad [2\pi]$$

$$\equiv -\theta - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \equiv \frac{\pi}{6} - \theta \quad [2\pi]$$

3) $\boxed{Réponse\ b)\ \lim_{x\to-\infty} \left(gof\right)(x) = 0}$

$$g(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

$$\left|\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\end{array}\right. \overbrace{\Longrightarrow}^{\text{Théorème: Limite de la composée}} \lim_{x\to-\infty} \left(gof\right)(x) = 0$$

Exercice 2

(u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

1) <u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$ on a $u_0 = 0 \in [0,1]$ vrai.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \le u_n \le 1$ et montrons que $0 \le u_{n+1} \le 1$

On a : $u_{n+1} = \frac{2(u_n + 2) - 3}{u_n + 2} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}$.

$$0 \le u_n \le 1 \Leftrightarrow 2 \le u_n + 2 \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{u_n + 2} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le -\frac{3}{u_n + 2} \le -1$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2} \le 2 - \frac{3}{u_n + 2} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1 \Rightarrow 0 \le u_{n+1} \le 1 \quad d'où\ l'hérédité.$$

<u>Conclusion :</u> Pour tout entier naturel n on a : $0 \le u_n \le 1$.

2) a) $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{\cancel{2u_n} + 1 - u_n^2 - \cancel{2u_n}}{u_n + 2} = \frac{\left(1 - u_n\right)\left(1 + u_n\right)}{u_n + 2} \ge 0$

Car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le u_n \le 1$ donc la suite (u_n) est croissante.

$b)\left(u_n\right)$ *est croissante et majorée (par 1) donc elle est convergente. Posons* $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\left|\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f\left(u_n\right) \text{ avec } f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \left[0,1\right] \qquad\qquad\qquad \Rightarrow f(l) = l \\ f \text{ est continue sur } \left[0,1\right] \subset \mathbb{R} \setminus \left\{-2\right\} \end{array}\right.$$

$f(l) = l \Leftrightarrow \dfrac{2l+1}{l+2} = l \Leftrightarrow \cancel{2l} + 1 = l^2 + \cancel{2l} \Leftrightarrow l^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow l = -1$ *(à rejeter) ou* $l = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

$3)\ a)\left|u_{n+1} - 1\right| = \left|\dfrac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2}\right| = \left|\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}\right| = \dfrac{\left|u_n - 1\right|}{u_n + 2}$

$0 \le u_n \Leftrightarrow 2 \le u_n + 2 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{u_n + 2} \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\left|u_n - 1\right|}{u_n + 2} \le \dfrac{1}{2}\left|u_n - 1\right|$ *d'où* $\left|u_{n+1} - 1\right| \le \dfrac{1}{2}\left|u_n - 1\right|$.

$b)$ *<u>Initialisation :</u> Pour* $n = 0$ *on a :* $\left|u_0 - 1\right| = 1 \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$ *ce qui est vrai.*

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, *supposons que* $\left|u_n - 1\right| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et montrons que* $\left|u_{n+1} - 1\right| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\left|u_{n+1} - 1\right| \le \dfrac{1}{2}\left|u_n - 1\right| \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \left|u_{n+1} - 1\right| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ *d'où l'hérédité.*

<u>Conclusion :</u> Pour tout entier naturel n on a : $\left|u_n - 1\right| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$c)\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - 1\right| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } \dfrac{1}{2} \in \left]-1,1\right[\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - 1) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left((u_n - 1) + 1\right) = 1 \\ \text{c-à-d la suite } (u_n) \text{ est convergente et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \end{array}\right.$$

$$4)\ a)\ v_{n+1} = \frac{1 - u_{n+1}}{1 + u_{n+1}} = \frac{1 - \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{1 + \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{u_n + 2 + 2u_n + 1} = \frac{1 - u_n}{3(u_n + 1)} = \frac{1}{3}v_n.$$

Donc (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{3}$ *et de premier tèrme* $v_0 = \dfrac{1 - u_0}{1 + u_0} = 1$.

$b)\ v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ *et* $v_n = \dfrac{1 - u_n}{1 + u_n} \Leftrightarrow v_n + u_n v_n = 1 - u_n \Leftrightarrow u_n\left(v_n + 1\right) = 1 - v_n$

Alors $u_n = \dfrac{1 - v_n}{1 + v_n} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ *ou encore* $\boxed{u_n = \dfrac{3^n - 1}{3^n + 1}}$

Exercice 3

$1)\ a)\ AB = \left|z_B - z_A\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1 \Rightarrow B \in \mathscr{C}.$

$b)\ \dfrac{z_B - z_A}{z_F - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_F - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ \left[2\pi\right].$

Dans le triangle ABF *on a :*

$$\left|\begin{array}{l} AF = \left|z_F - z_A\right| = \left|2-1\right| = 1 = AB \\ (\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}}) \equiv arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_F - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ \left[2\pi\right] \end{array}\right. \Rightarrow AFB \text{ est équilateral.}$$

$2)\ a)\ 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$

$b)$ *Pour* $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ *on a* $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ *c'est la forme exponentielle de* z_B.

$$\begin{aligned} c)\ (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) &\equiv arg\left(z_E - z_A\right) - arg\left(z_B - z_A\right)\quad \left[2\pi\right] \\ &\equiv arg\left(z_B{}^2\right) - arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv 2\,arg\left(z_B\right) - \dfrac{\pi}{3}\quad\left[2\pi\right] \\ &\equiv \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} \equiv 0\quad \left[2\pi\right] \Rightarrow A, B \text{ et } E \text{ sont alignés.} \end{aligned}$$

Ou encore $\dfrac{Aff(\overrightarrow{AE})}{Aff(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{z_B{}^2}{z_B - z_A} = \dfrac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 3 \in \mathbb{R} \Rightarrow A, B$ *et* E *sont alignés.*

$3)\ \dfrac{z^2}{z-1} = \dfrac{z^2+1-1}{z-1} = \dfrac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A} = \dfrac{Aff(\overrightarrow{AM'})}{Aff(\overrightarrow{AM})} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'}$ *et* $\overrightarrow{AM}$ *colinéaires*

$\Leftrightarrow A,\ M$ *et* M' *alignés.*

Exercice 4

$1)\ a)$ *Pour tout réel* $x, -1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \le 3x + \sin x \le 3x + 1 \Leftrightarrow 3x - 2 \le f(x) \le 3x.$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \ge 3x - 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-2\right) = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \le 3x \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

$$b)\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right. \overbrace{\Longrightarrow}^{\text{Limite de la composée de deux fonctions}} \lim\limits_{x\to0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 \end{cases} \overset{\text{Limite de la composée de deux fonctions}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) = -1.$$

2) a) $3x = 1-\sin x \Leftrightarrow 3x+\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et en plus $f(0)\times f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1-\pi}{2} < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intérmédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]0,\dfrac{\pi}{6}\right[$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3+\cos x \geq 2 > 0$ car $\cos x \geq -1$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'où α est l'unique solution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $f(x) = 0$ ou encore de l'équation $3x = 1-\sin x$.

b)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(3+\dfrac{\sin x}{x}\right) = 4$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

g admet une limite finie en 0 donc g est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 3+\dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 4$.