Epreuve	Devoir de contrôle n°1	Professeur
Mathématiques	Classe : 4ème Math	Dhaouadi Nejib
Durée : 2H	Novembre 2014	

Exercice 1

Soit la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 3$ *et* $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = \sqrt{8 + 2u_n}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N};\ \ 0 < u_n < 4$.

   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N};\ \ 0 < 4 - u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 < 4 - u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   c) Retrouver le résultat de 1) c).

3) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N};\ \ 4 - \dfrac{2}{n}\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right] \le S_n < 4$.

   b) Déterminer la limite de (S_n).

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les nombres complexes $a = \sqrt{3} + i$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.

   b) Vérifier que $a^2 = 2\bar{b}$

2) a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives a , $\bar{b}$ et $c = a + \bar{b}$.

   b) Vérifier que $c = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + 2z - 2c = 0$.

   a) Vérifier que a est une solution de (E).

   b) On désigne par d la deuxième solution de (E).

   Montrer que $d = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.

   c) Construire alors le point D d'affixe d.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On a représenté ci – dessous la courbe représentative d'une fonction f *définie et continue sur* $\mathbb{R}$. *On sait que la courbe* $\mathscr{C}$ *admet :*

- *Une asymptote* D *d'équation* $y = x - 1$ *au voisinage de* $+\infty$.
- *Une branche parabolique de direction asymptotique celle de* $(O,\vec{j})$ *au voisinage de* $-\infty$.

En utilisant le graphique :

1) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\ ;\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - x + 1.$$

2) Déterminer les ensembles $f\left(\left[0,+\infty\right[\right)$ *et* $fof\left(\left]-2,2\right[\right)$.

3) Donner le domaine de définition de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{f(x)+1}}$

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ *admet, dans l'intervalle* $\left]1,2\right[$, *une solution unique dont – on donnera un encadrement d'amplitude* $0,1$.

5) Discuter, suivant les valeurs de m, *le nombre de solutions de l'équation* $f(x) = m$.