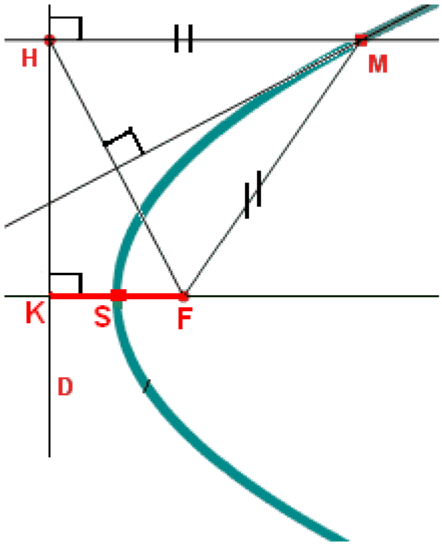
I. Parabole

I. Définition



Soit D une droite et F un point n'appartenant pas à cette droite.

On appelle parabole de foyer F et de directrice D l'ensemble des points M du plan tels que $MF = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur D.

Voir l'image animé sur le lien suivant:

http://www.sigmaths.tk/culture/animation/animation.php

- *La distance FK est appelée paramètre de la parabole.*
- *La droite (FK) est appelée axe de la parabole.*
- *(FK) est l'axe de symétrie de la parabole.*
- *Le milieu S du segment [FK] est appelé sommet de la parabole.*

Construction d'un point d'une parabole

Soit P une parabole de Foyer F et de directrice D.

- *On Choisit un point H de la directrice D.*
- *On construit la perpendiculaire à D passant par H.*
- *On construit la médiatrice du segment [FH].*

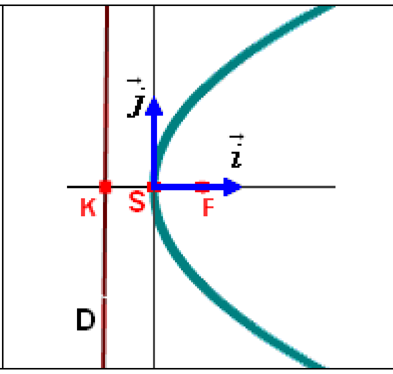
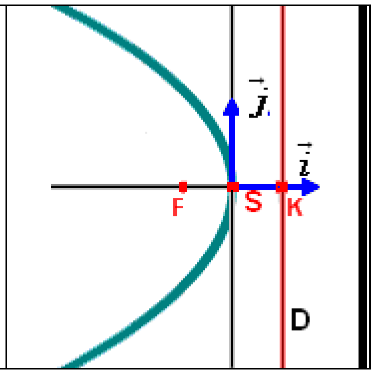
Ces deux droites se coupent en un point M de la parabole P.

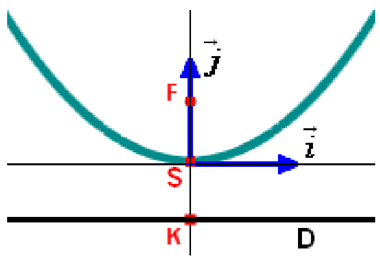
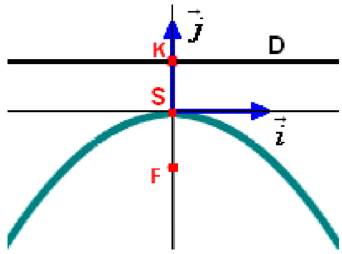
Remarque

La parabole P de foyer F et de directrice D est l'ensemble des centres des cercles tangents à D et passant par F.

2. Equation réduite d'une parabole

P est une parabole de sommet S et de foyer F. $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$ *est un repère orthonormé et p un réel strictement positif.*

Equation réduite: $y^2 = 2px$ *Directrice D:* $x = -\dfrac{p}{2}$ *Foyer* $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$.		*Equation réduite:* $y^2 = -2px$ *Directrice:* $x = \dfrac{p}{2}$; *Foyer* $F\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$.	

Equation réduite: $x^2 = 2py$ *Directrice D :* $y = -\dfrac{p}{2}$ *Foyer F* $\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$		*Equation réduite:* $x^2 = -2py$ *Directrice D :* $y = \dfrac{p}{2}$ *Foyer F* $\left(0, -\dfrac{p}{2}\right)$	

Exercice 1

On donne la parabole P d'équation réduite $y = 2x^2$ *dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer le paramètre p, le foyer F et la directrice D de cette parabole.

Solutions

$y = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2}y = 2py \Rightarrow 2p = \dfrac{1}{2}$ donc $p = \dfrac{1}{4}$.

L'axe des ordonnées est l'axe focal de P donc son foyer F admet pour coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{8}\right)$ *et sa directrice admet pour équation* $y = -\dfrac{1}{8}$.

3. Tangente à une parabole

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ *un repère orthonormé du plan et p un réel strictement positif. On a les résultats résumés dans le tableau suivant:*

Equation réduite de la parabole P	*Equation de la tangente à P au point* $M(x_0, y_0)$
$y^2 = 2px$	$yy_0 = p(x + x_0)$
$y^2 = -2px$	$yy_0 = -p(x + x_0)$
$x^2 = 2py$	$xx_0 = p(y + y_0)$
$x^2 = -2py$	$xx_0 = -p(y + y_0)$

Exercice 2

Soit P la parabole d'équation réduite $y^2 = 8x$, *dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Vérifier que le point $A\left(1, 2\sqrt{2}\right)$ *est un point de la parabole P*

b) Donner une équation de la tangente T à la parabole P en A.

2) Déterminer les tangentes éventuelles à P menées du point $B(0,2)$.

Solutions

1) a) $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 \times 1$ *donc A est un point de la parabole P.*

b) $y^2 = 8x = 2px \Rightarrow 2p = 8 \Rightarrow p = 4$

T admet pour équation $yy_0 = p(x + x_0)$ *où* $x_0 = 1$ *et* $y_0 = 2\sqrt{2}$

Ce qui donne $2\sqrt{2}y = 4(x + 1)$ *ou encore* $y = \sqrt{2}(x + 1)$

2) Soit $M(a,b)$ un point de la parabole P où la tangente T en ce point passe par le point B.

On sait que T admet pour équation $yb = p(x+a) = 4(x+a)$

$B(0,2) \in T \Leftrightarrow 2b = 4a \Leftrightarrow b = 2a$

En plus $M(a,b) \in P \Leftrightarrow b^2 = 8a$ d'où le système suivant $\begin{cases} b = 2a \\ b^2 = 8a \end{cases}$ qui admet pour solutions $(0,0)$ et $(2,4)$

La tangente au point M(a,b) admet pour équation $yb = 4(x+a)$

- Tangente au point O admet pour équation $x = 0$ (C'est la tangente au sommet)
- Tangente au point $M(2,4)$ admet pour équation $y = x + 2$

II. Hyperbole

Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à cette droite et un réel e>1. On appelle hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur D.

Soit (H) une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e et K le projeté orthogonal de F sur D

❖ La droite (FK) est appelée axe focal de l'hyperbole

❖ (H) rencontre l'axe focal en deux points S et S' appelés sommets de cette hyperbole.

S barycentre des points pondérés (F,1) et (K,-e)

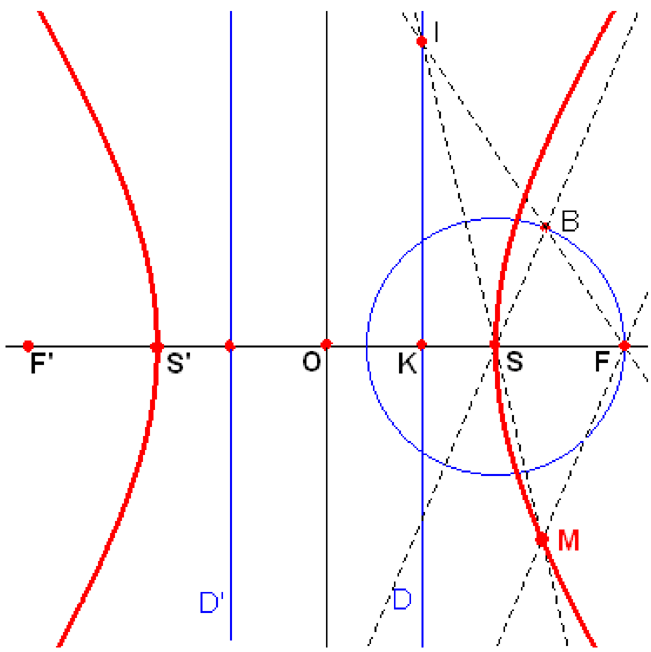
S' barycentre des points pondérés (F,1) et (K,e)

❖ Le milieu O du segment [SS'] est un centre de symétrie de l'hyperbole (H).

❖ L'hyperbole (H) admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal (FK) et la perpendiculaire à (FK) en O (axe non focal).

❖ Le symétrique du foyer F par rapport à O est un deuxième foyer pour l'hyperbole (H).

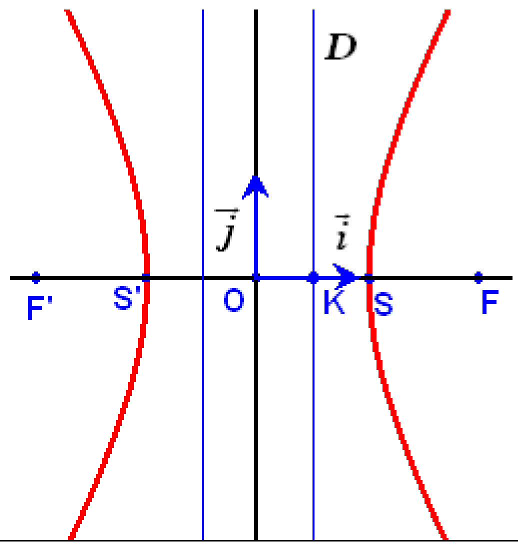
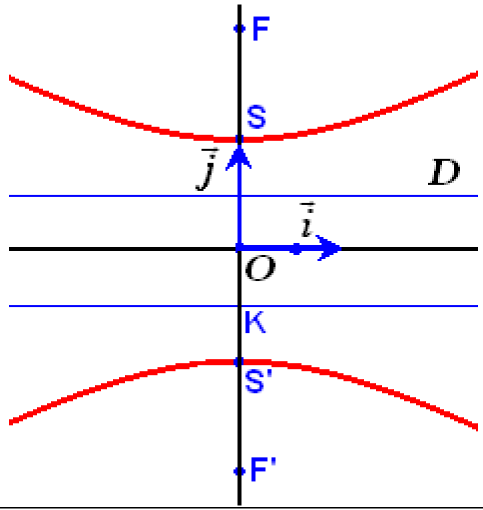
❖ La droite D' symétrique de la directrice D par rapport à O est une deuxième directrice de l'hyperbole (H), c'est la directrice associée au foyer F', alors que D c'est la directrice associée au foyer F.

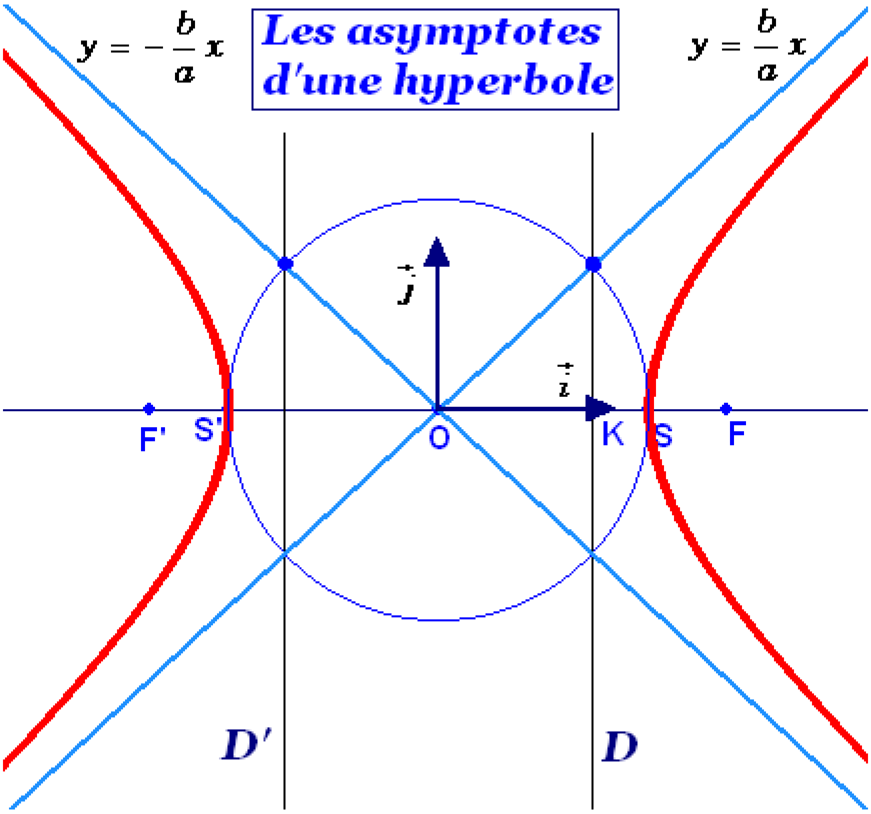


Construction d'un point d'une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e

- *On construit le point S barycentre des points pondérés (F,1) et (K,e) où K le projeté orthogonal de F sur D.*
- *On trace le cercle (C) de centre S passant par F.*
- *On choisit un point B sur le cercle (C) autre que F.*
- *On trace la droite (FB) qui coupe la directrice D en un point I.*
- *On construit la parallèle à (BS) passant par F. Cette droite coupe (IS) en un point M de l'hyperbole.*

Soient $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ *un repère orthonormé du plan et (H) une hyperbole de foyer F, de directrice D, d'excentricité e, de centre O et de sommets S et S'.*

Equation: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *avec* $a>0$ *et* $b>0$ $F(c,0)\,;F'(-c,0)$ *avec* $c=\sqrt{a^2+b^2}$ $D:\ x=\dfrac{a^2}{c}\,;\ e=\dfrac{c}{a}$ $S(a,0)\,;S'(-a,0)$ *Tangente au point* $M(x_0,y_0)$ $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$	
Equation: $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *avec* $a>0$ *et* $b>0$ $F(0,c)\ ;\ F'(0,-c)$ *avec* $c=\sqrt{a^2+b^2}$ $D:\ y=\dfrac{b^2}{c}\,;\ e=\dfrac{c}{b}$ $S(0,b)\,;S'(0,-b)$ *Tangente au point* $M(x_0,y_0)$ $-\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$	



Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit (H) l'ensemble des points M(x,y) tels que: $x^2 - 3y^2 - 36 = 0$

1) Montrer que (H) est une hyperbole.

2) Déterminer les coordonnées de ses sommets et de ses foyers

3) Donner les équations de ses asymptotes.

Solutions

1) $x^2 - 4y^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4y^2 - 36}{36} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{6^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

Donc (H) est une hyperbole.

2) Les sommets de (H) sont les points $S\left(6,0\right)$ *et* $S'\left(-6,0\right)$.

Les foyers de (H) sont les points $F\left(3\sqrt{5},0\right)$ *et* $F'\left(-3\sqrt{5},0\right)$

Car $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

3) Les asymptotes sont les droites d'équations $y = \dfrac{1}{2}x$ *et* $y = -\dfrac{1}{2}x$.

Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes admet une équation de la forme $xy = k$ *où* k *est un réel non nul.*

Exemple

Considérons l'hyperbole (H) de l'exercice précédent qui admet pour équation

$x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ *dans un repère orthonormé* $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Ses asymptotes $\Delta_1 : x - 2y = 0$ *et* $\Delta_2 : x + 2y = 0$

$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur de* Δ_1 *et* $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur de* Δ_2

Considérons le nouveau repère $R' = \left(O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$

Soit M un point du plan de coordonnées (x,y) dans le repère R et (X,Y) dans le repère R'.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j}\\ &= X\overrightarrow{u_1} + Y\overrightarrow{u_2} = X\left(2\vec{i} + \vec{j}\right) + Y\left(-2\vec{i} + \vec{j}\right) = (2X - 2Y)\vec{i} + (X + Y)\vec{j}\end{aligned}$$

Donc $\quad x = 2X - 2Y \quad$ *et* $\quad y = X + Y$

$$\begin{aligned}M \in (H) &\Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 36 \Leftrightarrow (2X - 2Y)^2 - 4(X + Y)^2 = 36\\ &\Leftrightarrow \cancel{4X^2} - 8XY + \cancel{4Y^2} - \cancel{4X^2} - 8XY - \cancel{4Y^2} = 36 \Leftrightarrow XY = -\frac{9}{4}\end{aligned}$$

III. Ellipse

I. Définition et conséquences

Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à cette droite et un réel e tel que 0<e<1.
On appelle ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ ***où H est le projeté orthogonal de M sur D.***

Soit (E) une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e

et K le projeté orthogonal de F sur D

- *La droite (FK) est appelée axe focal de l'ellipse.*
- *(E) rencontre l'axe focal en deux points S et S' appelés sommets principaux de cette ellipse.*

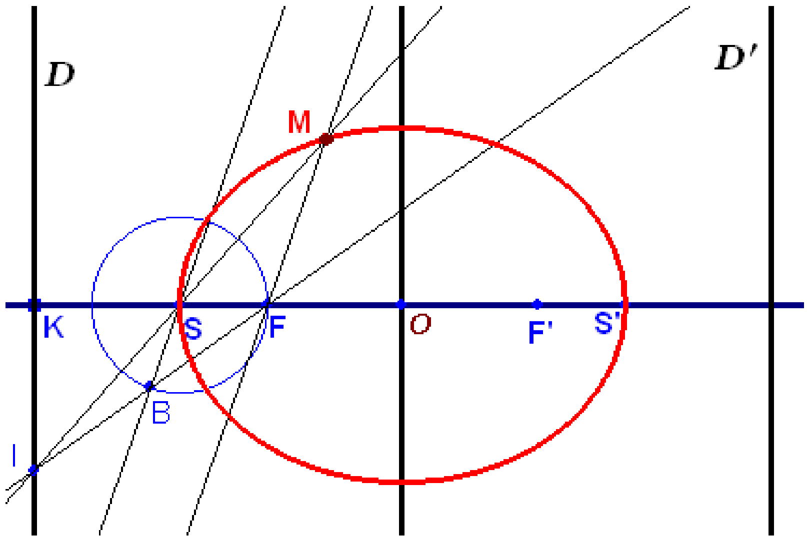
  S barycentre des points pondérés (F,1) et (K,e)

  S' barycentre des points pondérés (F,1) et (K,-e)
- *Le milieu O du segment [SS'] est un centre de symétrie de l'ellipse (E).*
- *l'ellipse (E) admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal (FK) et la perpendiculaire à (FK) en O (axe non focal).*

- *Le symétrique du foyer F par rapport à O est un deuxième foyer pour l'ellipse (E).*
- *La droite D' symétrique de la directrice D par rapport à O est une deuxième directrice de l'ellipse (E), c'est la directrice associée au foyer F', alors que D c'est la directrice associée au foyer F.*
- *l'ellipse (E) coupe l'axe non focal en deux points appelés sommets secondaires de cette ellipse.*

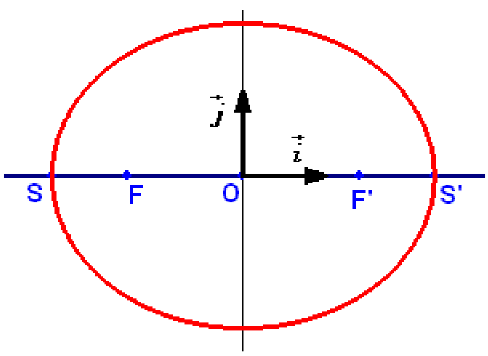
Construction d'un point d'une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e

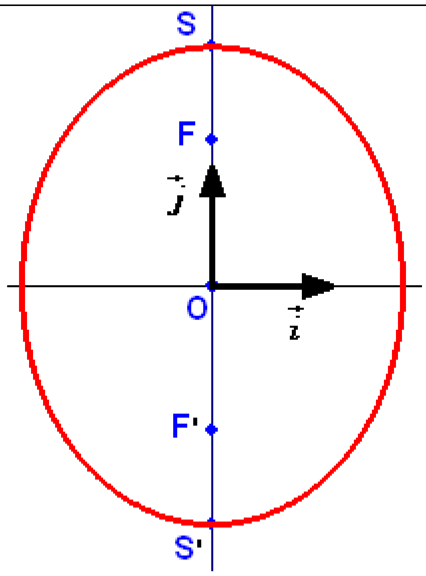
Même construction que dans le cas d'une hyperbole.



2. Equations et coordonnées

Soient $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan et (H) une hyperbole de foyer F, de directrice D, d'excentricité e, de centre O et de sommets S et S'.

Equation: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *avec* $a>b>0$ $F(c,0)\,;\,F'(-c,0)$ *avec* $c=\sqrt{a^2-b^2}$ *D:* $x=\frac{a^2}{c}\,;\ e=\frac{c}{a}$ $S(a,0)\,;\,S'(-a,0)$	 *Tangente au point* $M(x_0,y_0)$ $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

Equation: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *avec* $b>a>0$ $F(0,c)$; $F'(0,-c)$ *Avec* $c=\sqrt{b^2-a^2}$ $D:\ y=\frac{b^2}{c}$; $e=\frac{c}{b}$ $S(0,b)$; $S'(0,-b)$ *Tangente au point* $M(x_0,y_0)$ $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$	

III. Equation non réduite d'une conique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, *on désigne par* $\mathscr{C}$ *l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que :* $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, *où A, B, C, D et E sont des réels.*

$\mathscr{C}$ *est une parabole ou la réunion de deux droites parallèles ou une droite ou le vide si* $AB=0$

$\mathscr{C}$ *est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes si* $AB<0$

$\mathscr{C}$ *est une ellipse ou un cercle ou un singleton ou le vide si* $AB>0$