Epreuve

Mathématiques

Durée : 4H

Devoir de synthèse n°3

Classe : 4ème Maths

Professeurs

Dhaouadi Nejib
&
Hdhili Mourad

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte parmi les réponses proposées. Indiquer à chaque fois le numéro de la question et la réponse choisie.

1) *On s'intéresse à la durée de vie X, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est :*

a) $\ln\left(\frac{50}{41}\right)$ b) $\ln\left(\frac{41}{50}\right)$ c) $\frac{\ln(82)}{\ln(100)}$.

2) *Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\cos x$.*

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On fait tourner la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses, elle engendre un solide de révolution S. Le Volume de S (en unité d'aire) est égale à :

a) $\frac{\pi^2}{2}$ b) $\frac{\pi^3}{2}$ c) $\frac{\pi^2}{4}$

3) *Considérons l'hyperbole d'équation $y^2-4x^2=4$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.*

Les coordonnées de ses foyers dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont :

a) $(0,-2)$ et $(0,2)$ b) $(0,-\sqrt{5})$ et $(0,\sqrt{5})$ c) $(0,-\sqrt{3})$ et $(0,\sqrt{3})$

Exercice 2 (5 points)

1) a) *Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n ; $6^n \equiv 6 \pmod{10}$.*

b) *Montrer que $2^{2012} \equiv 6^{503} \pmod{10}$*

c) *Déduire, d'après ce qui précède, le chiffre des unités de 2012^{2012}.*

2) a) *Vérifier que* $3^{10} \equiv -1 \pmod{25}$ et $2^{10} \equiv -1 \pmod{25}$.

b) *En déduire que* $503^{2012} \equiv 16 \pmod{25}$ et $4^{2012} \equiv 16 \pmod{25}$.

c) En remarquant que $2012 = 503 \times 4$, *montrer que* $2012^{2012} \equiv 56 \quad mod\ 25$.

d) Déterminer alors le chiffre des dizaines de 2012^{2012} .

3) Considérons l'ensemble des entiers m *tels qu'il existe un couple* p, q *d'entiers vérifiant :* $m = 11p - 1$ *et* $m = 9q + 5$.

a) Montrer que le couple p, q *est solution de l'équation* $11x - 9y = 6 \quad (E)$.

b) Vérifier que (3,3) est une solution de (E) et puis résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, *cette équation.*

c) En déduire que $m \equiv 32 \quad mod\ 99$.

d) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m *vérifiant* $m \geq 2000$.

Exercice 3 (5 points)

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication en série d'un article. Un contrôle de qualité à montré que chaque article produit pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

On considère les événements suivants :

S *: « L'article présente un défaut de soudure ».*

C *: « L'article présente un défaut sur un composant électronique ».*

D *: « L'article est défectueux »*

1) a) Calculer $P(S \cap C)$.

b) En déduire que $P(D) = 0,0494$

2) Une grande surface reçoit 500 articles de cette entreprise. Soit X la variable aléatoire qui a cet ensemble de 500 articles associe le nombre d'articles défectueux.

Définir la loi de probabilité de X. calculer l'espérance mathématique de X. quel est le sens de ce nombre ?

3) a) Un petit commerçant passe une commande de 20 articles à cette entreprise. Calculer à 10^{-3} *près, la probabilité qu'il y avait plus de deux articles défectueux dans sa commande.*

b) Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieur à 0,5. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4) *La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,0008,*

   a) *Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1000 jours.*

   b) *Sachant qu'un article a duré 1000 jours. Quelle est la probabilité qu'il dure 1200 jours.*

Exercice 4 (7 points)

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c\ e^{-x}$ où a, b et c sont des réels. On donne les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives des fonctions f et f' où f' désigne la fonction dérivée de f *(Voir page 4).*

1) *Préciser, avec justification, la courbe correspondante à chacune des deux fonctions f et f'.*

2) *A l'aide des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, déterminer les réels a, b et c.*

3) *Dresser le tableau de variation de f.*

4) *Déterminer, avec justification et sans calcul, le nombre de points d'inflexions éventuels pour la courbe représentative de f.*

5) *Déterminer graphiquement l'aire A de la région du plan limitée par la courbe représentative de f' et les droites d'équations $y = 0$, $x = -1$ et $x = 0$.*

PARTIE B

Considérons la suite I_n définie par :

$$I_0 = \int_{-1}^{0} e^{-t}dt \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{1}{n!}\int_{-1}^{0} 1 + t^{\ n}\ e^{-t}dt$$

1) a) *Montrer que pour tout entier naturel n,* $\dfrac{1}{n+1} \leq n!\,I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$ **(1)**

   b) *En déduire que la suite I_n est convergente et préciser sa limite.*

2) a) *A l'aide d'une intégration par partie, montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1\ !} + I_n$.

   b) *En déduire que pour tout entier naturel n,* $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ **(2)**

   Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

3) *Calculer I_2 et déduire l'aire de la région du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.*

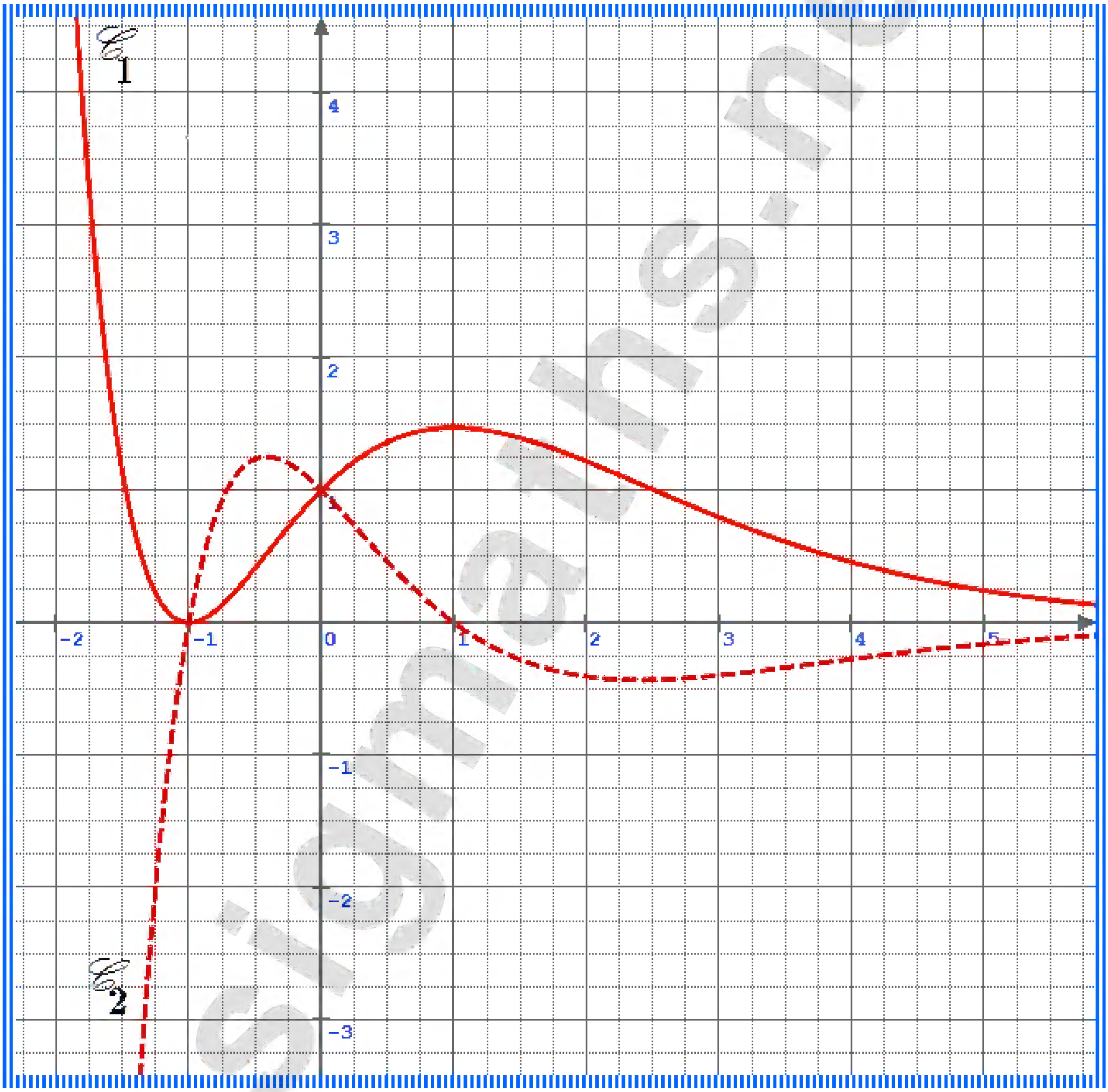
4) *On se propose dans cette question de montrer que le nombre e n'est pas rationnel.*

Pour cela on procède par l'absurde et on suppose que $e = \dfrac{p}{q}$ *où p et q sont deux entiers naturels non nuls et on pose* $u_n = n!\,I_n$.

a) *Comment peut-on choisir l'entier naturel n pour que* u_n *soit un entier ? (utiliser (2))*

b) *Utiliser l'encadrement (1) pour montrer que pour un choix convenable de l'entier naturel n,* $0 < u_n < 1$.

c) *Conclure.*



CORRECTION DU DEVOIR

Exercice 1

1) a) $P(0 \leq X \leq 1) = 1 - e^{-\lambda} = 0,18 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0,82 \Leftrightarrow -\lambda = ln(0,82) = ln\left(\frac{82}{100}\right) = ln\left(\frac{41}{50}\right)$

Ce qui donne $\lambda = ln\left(\frac{50}{41}\right)$

2) a) $V = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x dx = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$

3) b)

$y^2 - 4x^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ donc de la forme $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = 1$ et $b = 2$

L'axe des ordonnées est l'axe focal de cette hyperbole. Ces foyers sont les points

$F(0,c)$ et $F'(0,-c)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$.

Exercice 2

1) a) <u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $6^1 = 6 \equiv 6 \pmod 6$

<u>Hérédité</u> : Soit n un entier naturel non nul,

Supposons que $6^n \equiv 6 \pmod{10}$ et montrons que $6^{n+1} \equiv 6 \pmod{10}$

$6^{n+1} = 6^n \times 6 \equiv 6 \times 6 = 36 \pmod{10}$ or $36 \equiv 6 \pmod{10}$ donc $6^{n+1} \equiv 6 \pmod{10}$

b) $2^{2012} = (2^4)^{503} = 16^{503}$ et puisque $16 \equiv 6 \pmod{10}$ donc $2^{2012} \equiv 6^{503} \pmod{10}$

c) On a $2012 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2012^{2012} \equiv 2^{2012} \pmod{10}$ et d'après ce qui précède

$2^{2012} \equiv 6^{503} \pmod{10}$ et $6^{503} \equiv 6 \pmod{10}$ donc $2012^{2012} \equiv 6 \pmod{10}$

Ce qui permet de conclure que 6 est le chiffre des unités de 2012^{2012}

2) a)

$3^{10} = 59049 = 59050 - 1 \equiv -1 \pmod{25}$ et $2^{10} = 1024 = 1025 - 1 \equiv -1 \pmod{25}$

b)

$503 \equiv 3 \pmod{25} \Rightarrow 503^{2012} \equiv 3^{2012} \pmod{25}$ et $3^{2012} = (3^{10})^{201} \times 9 \equiv -9 \pmod{25}$

donc $503^{2012} \equiv -9 \equiv 16 \pmod{25}$

$4^{2012} = 2^{4024} = (2^{10})^{402} \times 16 \equiv 16 \pmod{25}$

c) $2012^{2012} = 503^{2012} \times 4^{2012} \equiv 16 \times 16 \pmod{25}$ $16 \times 16 = 256 = 8 \times 25 + 56$

donc $2012^{2012} \equiv 56 \pmod{25}$

d) $2012 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2012^{2012} \equiv 0 \pmod 4$ et $56 \equiv 0 \pmod 4$

donc $2012^{2012} - 56 \equiv 0 \pmod 4$.

$$\begin{cases} 2012^{2012} - 56 \equiv 0 \quad mod\ 4 \\ 2012^{2012} - 56 \equiv 0 \quad mod\ 25 \\ 4 \wedge 25 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2012^{2012} - 56 \equiv 0 \quad mod\ 100 \\ \Leftrightarrow\ 2012^{2012} \equiv 56 \quad mod\ 100 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 5 \text{ est le chiffre des} \\ \text{dizaines du nombre} \\ 2012^{2012} \end{array} \right.$$

3) a)

$m = 11p - 1 = 9q + 5 \Rightarrow 11p - 9q = 5 + 1 = 6 \Rightarrow (p,q)$ est solution de l'équation (E).

b) $11 \times 3 - 9 \times 3 = 33 - 27 = 6 \Rightarrow (3,3)$ est une solution de l'équation (E)

$11x - 9y = 6 \Leftrightarrow 11x - 9y = 11 \times 3 - 9 \times 3 \Leftrightarrow 11\ \ x - 3\ \ = 9\ \ y - 3$

$9 \wedge 11 = 1$ et 9 divise $11\ \ x - 3\ \ \overset{Gauss}{\Rightarrow}$ 9 divise $x - 3 \Leftrightarrow x - 3 = 9k\ (k \in \mathbb{Z})$

$x - 3 = 9k$ et $11\ \ x - 3\ \ = 9\ \ y - 3\ \ \Rightarrow 11 \times 9k = 9\ \ y - 3\ \ \Rightarrow y - 3 = 11k$

Donc $x = 9k + 3$ et $y = 11k + 3$ avec k est un entier.

Réciproquement : $11\ \ 9k + 3\ \ - 9\ \ 11k + 3\ \ = 99k + 33 - 99k - 27 = 6$

<u>Conclusion</u> : L'ensemble des solutions de (E) est égal à $\ 9k + 3, 11k + 3\ \ , k \in \mathbb{Z}$.

c) $m = 11p - 1 = 11\ \ 9k + 3\ \ - 1 = 99k + 32 \equiv 32 \quad mod\ 99$

d) $m = 99k + 32 \geq 2000 \Leftrightarrow k \geq \dfrac{2000 - 32}{99} \simeq 19,9$ donc pour avoir le plus petit de ces nombres

il suffit de prendre $k = 20$ ce qui donne $\boxed{m = 99 \times 20 + 32 = 2012}$.

Exercice 3

1) a) $p(S \cap C) = p(S) \times p(C) = 0,03 \times 0,02 = 0,0006$ car S et C sont indépendants

b) $p(D) = p(S \cup C) = p(S) + p(C) - p(S \cap C) = 0,03 + 0,03 - 0,0006 = 0,0494$.

2) X suit une loi binomiale de paramètres n=500 et p=0,0494.

$$\forall k \in\ \ 0,...,500\ \ ;\ p\ \ X = k\ \ = C_{500}^{k}\ \ 0,0494\ \ ^{k}\ \ 1 - 0,0494\ \ ^{500-k} = C_{500}^{k}\ \ 0,0494\ \ ^{k}\ \ 0,9506\ \ ^{500-k}$$

<u>L'espérance mathématique</u> $E(X) = np = 500 \times 0,0494 = 24,7$

<u>Interprétation</u> : Sur 500 articles il y a, en moyenne, environ 25 articles défectueux.

3) a) On note Y la loi de probabilité qui associe le nombre d'articles défectueux.

$$p(Y \geq 2) = 1 - p(\overline{Y \geq 2}) = 1 - p(Y < 2) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1)$$

$$= 1 -\ \ 0,9506\ \ ^{20} - C_{20}^{1}\ \ 0,0494\ \ ^{1}\ \ 0,9506\ \ ^{19} = 0,2597 \simeq 0,26$$

b) $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y < 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 -\ \ 0,9506\ \ ^{n}$

$$1 -\ \ 0,9506\ \ ^{n} \leq 0,5 \Leftrightarrow\ \ 0,9506\ \ ^{n} \geq 0,5 \Leftrightarrow n\ln\ \ 0,9506\ \ \geq \ln(0,5) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9506)} \simeq 13,68$$

alors le nombre maximal d'articles est égal à 13

4) Désignons par T la durée de vie en jours d'un article

a) $P\left(700 \leq T \leq 1000\right) = e^{-0,0008\times 700} - e^{-0,0008\times 1000} = e^{-0,56} - e^{-0,8} \simeq 0,122$.

b) $P\left((T \geq 1200) / (T \geq 1000)\right) = \dfrac{P\left((T \geq 1200) \cap (T \geq 1000)\right)}{P(Y \geq 1000)} = \dfrac{P(Y \geq 1200)}{P(Y \geq 1000)}$

$$= \frac{e^{-0,0008\times 1200}}{e^{-0,0008\times 1000}} \simeq 0,852$$

Exercice 4

PARTIE A

1) $\mathscr{C}_1$ est la représentation graphique de f et $\mathscr{C}_2$ celle de f' .

Justification : Si la courbe $\mathscr{C}_2$ traverse l'axe des abscisses c-à-d (sa fonction correspondante change de signe) alors la courbe $\mathscr{C}_1$ change de sens de variation. Ou encore : la fonction qui correspond à $\mathscr{C}_1$ est positive alors que la fonction qui correspond à $\mathscr{C}_2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $f(0) = 1 \Rightarrow ce^0 = 1 \Leftrightarrow c = 1$.

$f(-1) = 0 \Rightarrow (a - b + c)e = 0 \Leftrightarrow a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow a - b = -1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = \left(ax^2 + (2a - b)x + b - c\right) e^{-x}$

$f'(0) = 1 \Rightarrow (b - c)e^0 = 1 \Leftrightarrow b - c = 1 \Leftrightarrow b = c + 1 = 2$

$a - b = -1 \Rightarrow a = b - 1 = 1$ donc $\boxed{f(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right) e^{-x} = \left(x + 1\right)^2 e^{-x}}$

3) Graphiquement :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	0

$f(1) = (1 + 1)^2 e^{-1} = 4e^{-1}$

4) *Utilisation de la concavité* : La courbe de f change de concavité deux fois de suite donc il y a deux points d'inflexions.

Utilisation de la dérivée seconde : f étant deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et en plus f' admet deux extrémums donc la courbe de f admet deux points d'inflexions.

5) $A = \int_{-1}^{0} f'(x)dx = \left[f(x)\right]_{-1}^{0} = f(0) - f(-1) = 1 - 0 = 1$.

PARTIE B

1) a) Pour $n=0$;

$$I_0=\int_{-1}^{0}e^{-t}dt=\ -e^{-t}\ {}_{-1}^{\,0}=-1+e=e-1\simeq 1{,}7\quad \text{et}\quad \frac{1}{0+1}\le I_0\le\frac{e}{0+1}$$

Pour $n\ge 1$

$$-1\le t\le 0\Leftrightarrow 0\le -t\le 1\Leftrightarrow 1\le e^{-t}\le e\Rightarrow\ 1+t\ ^{n}\le\ 1+t\ ^{n}e^{-t}\le e\ 1+t\ ^{n}$$

Donc $$\int_{-1}^{0}(1+t)^n dt\le\int_{-1}^{0}(1+t)^n e^{-t}dt\le e\int_{-1}^{0}(1+t)^n dt$$

Ce qui conduit à $$\left[\frac{1}{n+1}\ 1+t\ ^{n+1}\right]_{-1}^{0}\le n!\,I_n\le e\left[\frac{1}{n+1}\ 1+t\ ^{n+1}\right]_{-1}^{0}$$

ou encore $$\frac{1}{n+1}\le n!\,I_n\le\frac{e}{n+1}$$

b) D'après ce qui précède $$\frac{1}{n+1}\le n!\,I_n\le\frac{e}{n+1}\Rightarrow 0\le I_n\le\frac{e}{n+1\ !}\le\frac{e}{n+1}$$

en plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}=0$ donc la suite I_n converge vers 0.

2) a) Pour $n=0$ on a :

$$I_1=\int_{1}^{0}(1+t)e^{-t}dt=\ -(1+t)e^{-t}\ {}_{-1}^{\,0}+\int_{1}^{0}e^{-t}dt=-\frac{1}{(0+1)!}+I_0$$

Pour $n\ge 1$

$$\left\|\begin{array}{l} u=(1+t)^{n+1}\Rightarrow u'=(n+1)(1+t)^n\\ v'=e^{-t}\qquad\Leftarrow\quad v=-e^{-t}\end{array}\right.$$

$$I_{n+1}=\frac{1}{n+1\ !}\int_{-1}^{0}(1+t)^{n+1}e^{-t}$$

$$=\frac{1}{n+1\ !}\left[-\ 1+t\ ^{n+1}e^{-t}\right]_{-1}^{0}+\frac{n+1}{n+1\ !}\int_{-1}^{0}(1+t)^n e^{-t}dt$$

$$=-\frac{1}{n+1\ !}+\frac{1}{n!}\int_{-1}^{0}(1+t)^n e^{-t}dt=-\frac{1}{n+1\ !}+I_n$$

b)

$$I_1=-\frac{1}{1!}+I_0$$

$$I_2=-\frac{1}{2!}+I_1$$

.

$$I_n=-\frac{1}{n!}+I_{n-1}$$

En faisant la sommes membre à membre et après simplification on obtient :

$$I_n=I_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=e-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$I_n=e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e-I_n\quad\text{et puisque}\quad\lim_{n\to+\infty}I_n=0\quad\text{alors}\quad\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e}$$

3) $$I_2=e-\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}=e-1-1-\frac{1}{2}=e-\frac{5}{2}$$

L'aire demandée $$=A-\int_{-1}^{0}f(x)dx=A-\int_{-1}^{0}(1+t)^2e^{-t}dt=A-2I_2$$

Donc $\boxed{L'aire\ demandée = 6 - 2e}$

4) a) $u_n = n!\,I_n = n!\left(\dfrac{p}{q} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right) = \dfrac{n!}{q}\,p - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!}$

$\forall k \in \ 0,\dots,n \ ;\ \dfrac{n!}{k!} \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$

Donc pour que u_n *soit un entier il faut que* $\dfrac{n!}{q}$ *soit un entier et pour cela il suffit de choisir n supérieur à q.*

b) *Pour* $n \geq q$ *et* $n \geq 2$ *on a :* $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{e}{n+1} < 1$

c) *Pour* $n \geq sup(2,q)$ *on a :* $u_n \in \mathbb{Z} \cap \ 0,1 \ = \emptyset$ *(ensemble vide) ce qui est impossible car* u_n *existe pour tout entier naturel n.*

Donc notre supposition est fausse et que e n'est pas un nombre rationnel.

N.B : La limite de nombres rationnels n'est pas forcément un nombre rationnel.