LYCEE DE SBEITLA

Mathématiques

SECTION : 4-IÈME MATHÉMATIQUES

Devoir de synthèse n° 3

Durée de l'épreuve: 4 heures - Coefficient : 4

Professeur : Dhaouadi Nejib

Date : 13/05/2010

Ce devoir comporte 4 pages de 1/4 à 4/4

Exercice n°1

Pour chacune des propositions données, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Aucune justification n'est demandée.

1) Dans l'espace $\mathcal{E}$, rapporté à un repère orthonormé, on donne le plan P d'équation $x - y + 2z - 1 = 0$ et la sphère S de centre $I(0,0,1)$ et de rayon 1.

P1:*« Le plan P et la sphère S sont sécants.»*

2) Soit f l'unique solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 1$, vérifiant $f(0) = 1$.

P2: *«$f(\ln 2) = \dfrac{11}{2}$.»*

3) Le temps de réponse X (en secondes) à un terminal relié à un ordinateur est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

P3: *«$P(X \leq 1) = e^{-0,2}$»*

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{-1}{2} & \end{cases}$

Cet exercice a pour objectif l'étude de la continuité et de la dérivabilité de f en 0.

A cet effet, on introduit la fonction g définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^3}{1+t}\,dt$.

1) Montrer que pour tout réel $x \in [0,+\infty[$, $0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^4}{4}$.

(Ind: Remarquer que pour $t \geq 0$, $0 \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$)

2) Soit $x \in]-1,0]$

a) Pour tout réel $t \in [x,0]$, comparer $\dfrac{1}{1+t}$ et $\dfrac{1}{1+x}$

b) En déduire que pour tout réel $x \in]-1,0]$, $0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^4}{4(1+x)}$.

3) Montrer alors que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^3} = 0$.

4) a) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on a: $\dfrac{t^3}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dfrac{1}{1+t}$.

b) En déduire que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - g(x)$.

5) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Exercice n°3

Considérons le système (S) suivant : $\begin{cases} t \equiv -4 \pmod{19} \\ t \equiv 4 \pmod{17} \end{cases}$

où l'inconnue t est un entier relatif.

1) On se propose dans cette question de résoudre le système (S)

a) Vérifier que 2010 est une solution du système (S).

b) Soit t une solution de (S).

Montrer que $t = 19x - 4 = 17y + 4$ *où (x,y) est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) :* $19x - 17y = 8$.

c) Vérifier que (4,4) est une solution particulière de l'équation (E)

Résoudre alors l'équation (E).

d) En déduire que les solutions du système (S) sont les entiers relatifs t de la forme $t = 323k + 72$ *où* $k \in \mathbb{Z}$.

2) Soit t une solution du système (S).

a) Compléter le tableau de congruence suivant:

	t	t^2	t^3	t^9	t^{18}	t^{36}
Modulo 19	-4					
Modulo 17	4					

b) En déduire que $t^{36} \equiv 1 \pmod{323}$

c) Vérifier que $t^{30} \equiv 7 \pmod{19}$ *et* $t^{30} \equiv -1 \pmod{17}$.

d) En déduire que $t^{30} + 69 \equiv 0 \pmod{323}$.

e) Déterminer enfin le reste de la division euclidienne de 2010^{2010} *par 323.*

Exercice n°4

Un lot de tulipes a un pouvoir germinatif de 80%; cela signifie que l'on considère que chaque bulbe a une probabilité égale à $\frac{4}{5}$ *de produire une fleur et cela indépendamment des autres bulbes.*

Chaque bulbe contient l'un des trois gènes R (rouge), B (blanc) et J (jaune) qui détermine la couleur de la future fleur éventuelle.

On suppose que la probabilité pour qu'un bulbe possède le gène R est $\frac{1}{2}$, *la probabilité* *pour qu'un bulbe possède la gène B est* $\frac{1}{10}$, *et la probabilité pour qu'un bulbe possède la gène J est* $\frac{2}{5}$

1) a) *Tracer un arbre pondéré traduisant la floraison d'un bulbe.*

   b) *Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur rouge?*

   c) *Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur blanche?*

2) *On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre k de fleurs rouges obtenues après avoir planté 5 bulbes. (La plantation de 5 bulbes est assimilée à 5 tirages avec remise)*

   a) *Vérifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.*

   b) *Déterminer la loi de probabilité de X.*

   c) *Déterminer le nombre moyen des fleurs rouges qu'on peut obtenir à l'aide de 5 bulbes.*

Exercice n°5

Le tableau suivant exprime l'évolution du taux de chômage dans un pays au cours des 8 dernières années.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
X (numéro de l'année)	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux de chômage Y en %	10	9	8,5	8	7	7,2	6	6,5

1) a) *Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série statistique double (X,Y).*

   b) *Peut-on justifier un ajustement affine entre X et Y ?*

2) a) *Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (X,Y).*

   b) *Un ajustement affine, par la méthode des moindres carrées, est il justifié?*

3) *Donner une équation de la droite de régression de Y en X.*

4) *Quel est le taux de chômage prévu dans ce pays après 10 ans (à partir de 2010)?*

Correction - devoir de synthèse n°3 4M 2010 -

Exercice 1

1) ***Vraie*** : *Soit d la distance entre le centre de la sphère I et le plan P*

$$d = \frac{|0-0+2\times 1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} < \text{rayon de la sphère qui est } 1$$

Donc le plan et la sphère sont sécants suivant un cercle.

2) ***Vraie*** : *La solution de l'équation différentielle* $y' = 2y+1$ *qui vérifie* $f(0)=1$ *est la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$.

Donc $f(\ln 2) = \frac{3}{2}e^{2\ln 2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}e^{\ln 4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\times 4 - \frac{1}{2} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

3) ***Faux***: $P(X \le 1) = 1 - e^{-0,2\times 1} = 1 - e^{-0,2} \ne e^{-0,2}$

Exercice 2

1) *Soit* $x \ge 0$. $\forall t \in [0,x]$, $0 \le \frac{1}{1+t} \le 1$ *donc* $0 \le \frac{t^3}{1+t} \le t^3$.

D'où $0 \le \int_0^x \frac{t^3}{1+t}dt \le \int_0^x t^3 dt$ *ou encore* $0 \le g(x) \le \frac{x^4}{4}$.

2) a) *Soit* $x \in]-1,0]$.

Pour tout réel $t \in [x,0]$, $0 < x+1 \le t+1 \le 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{t+1} \le \frac{1}{x+1}$

b) *Pour tout réel* $t \in [x,0]$, $0 < \frac{1}{t+1} \le \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{t^3}{x+1} \le \frac{t^3}{t+1} < 0$

Donc $\int_x^0 \frac{t^3}{x+1}dt \le \int_x^0 \frac{t^3}{t+1}dt < 0$ *ou encore* $\int_0^x \frac{t^3}{x+1}dt \ge \int_0^x \frac{t^3}{t+1}dt > 0$

Alors $0 \le g(x) \le \frac{1}{x+1}\int_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4(x+1)}$.

3) *Pour tout réel* $x \in]0,+\infty[$, $0 \le g(x) \le \frac{x^4}{4}$ *donc* $0 \le \frac{g(x)}{x^2} \le \frac{x^2}{4}$

En plus $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{4} = 0$ *d'où* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^2} = 0$

De même on a $0 \le \frac{g(x)}{x^3} \le \frac{x}{4}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{4} = 0$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^3} = 0$

Pour tout réel $x \in]-1,0[$, $0 \le g(x) \le \frac{x^4}{4(x+1)}$ *donc* $0 \le \frac{g(x)}{x^2} \le \frac{x^2}{4(x+1)}$

En plus $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{4(x+1)} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$

Pour tout réel $x \in]-1,0[$, $0 \le g(x) \le \dfrac{x^4}{4(x+1)}$ donc $\dfrac{x}{4(x+1)} \le \dfrac{g(x)}{x^3} \le 0$

En plus $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{4(x+1)} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)}{x^3} = 0$

Conclusions:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)}{x^3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^3} = 0$

4) a) Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on a:

$$1 - t + t^2 - \frac{1}{1+t} = \frac{(1-t)(1+t) + t^2(1+t) - 1}{1+t} = \frac{\cancel{1} - \cancel{t^2} + \cancel{t^2} + t^3 \cancel{-1}}{1+t} = \frac{t^3}{1+t}.$$

b) $$g(x) = \int_0^x \frac{t^3}{1+t}\,dt = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - \frac{1}{1+t}\right)dt = \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln(1+t)\right]_0^x$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$$

$$\boxed{\text{D'où pour tout réel } x > -1 \;; \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - g(x)}$$

5) **Continuité de f en 0**

D'après ce qui précède, pour tout réel $x \in]-1,+\infty[\setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{g(x)}{x^2}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2} = f(0)$ et par suite f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0

Pour tout réel $x \in]-1,+\infty[\setminus \{0\}$;

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \dfrac{1}{2}}{x} = \frac{\cancel{-\dfrac{1}{2}} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{g(x)}{x^2} + \cancel{\dfrac{1}{2}}}{x} = \frac{1}{3} - \frac{g(x)}{x^3}$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{1}{3}$

Le rapport $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ admet une limite finie, égale à $\dfrac{1}{3}$, quand x tend vers 0 donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{3}$.

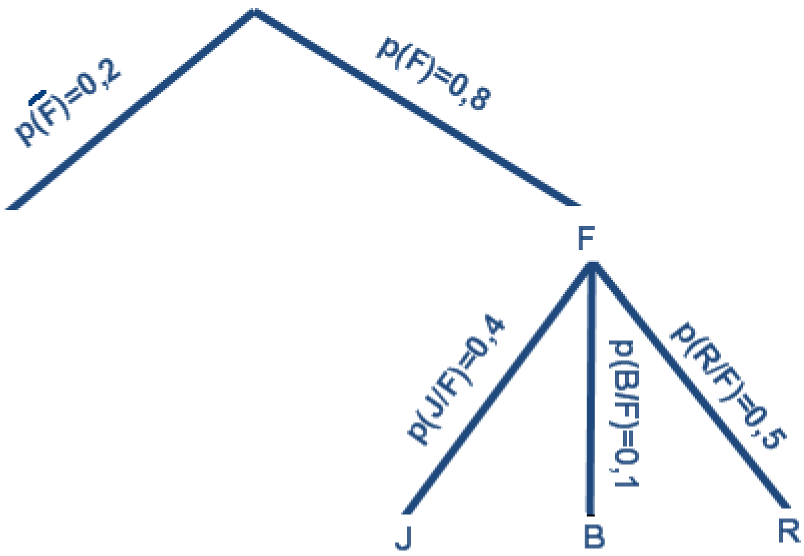
Exercice 3

1) a) On désigne par F l'évènement «Le bulbe planté fleurit» (produit une fleur)

R l'évènement «Le bulbe planté produit une fleur rouge»

B l'évènement «Le bulbe planté produit une fleur blanche»

J l'évènement «Le bulbe planté produit une fleur jaune»



b) $p(F\cap R) = p(F)\times p(R/F) = 0,8\times 0,5 = 0,4$

c) $p(F\cap B) = p(F)\times p(B/F) = 0,8\times 0,1 = 0,08$

2) a)

- La plantation de 5 bulbes est assimilée à cinq épreuves <u>identiques</u> et <u>indépendantes</u>
- chaque épreuve admet deux issues, succès ou échec.
  Un succès est représenté par la réalisation de l'évènement $F\cap R$.
- X désigne le nombre de succès obtenus au cours des cinq épreuves.

Donc X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $p = p(F\cap R) = 0,4$.

b) Pour tout entier $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$; $p(X=k) = C_5^k(0,4)^k(0,6)^{5-k}$

c) Le nombre moyen des fleurs rouges qu'on peut obtenir à l'aide de 5 bulbes ce n'est que l'espérance mathématique de X qui est donné par la formule $E(X) = np$

Donc $E(X) = 5\times 0,4 = 2$.

c.-à-d. : Après avoir planté 5 bulbes, on obtient, en moyenne, 2 fleurs rouges.

Exercice 4

1) a) $2010 = 105 \times 19 + 15 = 106 \times 19 - 4 \Rightarrow 2010 \equiv -4 \pmod{19}$

$2010 = 118 \times 17 + 4 \Rightarrow 2010 \equiv 4 \pmod{17}$.

D'où 2010 est une solution du système (S).

b) $t \equiv -4 \pmod{19}$ donc il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $t = 19x - 4$

$t \equiv 4 \pmod{17}$ donc il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $t = 17y + 4$.

Donc $t = 19x - 4 = 17y + 4$ avec (x,y) est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $19x - 4 = 17y + 4$ ou encore $19x - 17y = 8$.

c) $19 \times 4 - 17 \times 4 = 76 - 68 = 8 \Rightarrow (4,3)$ est une solution de (E).

$19x - 17y = 8 \Leftrightarrow 19x - 17y = 19 \times 4 - 17 \times 4 \Leftrightarrow 19(x-4) = 17(y-4)$.

17 divise $19(x-4)$ avec $17 \wedge 19 = 1$ donc, d'après le théorème de Gauss, 17 divise $x - 4$ ou encore $x - 4 = 17k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$19(x-4) = 17(y-4)$ et $x - 4 = 17k$ donne $y - 4 = 19k$

D'où $x = 17k + 4$ et $y = 19k + 4$.

<u>Réciproquement</u> : $\forall k \in \mathbb{Z},\ 19(17k+4) - 17(19k+4) = 76 - 68 = 8$

Conclusion: les solutions de (E) sont les couples $(17k+4, 19k+4)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

d) $t = 19x - 4$ avec $x = 17k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $\boxed{t = 19(17k+4) - 4 = 323k + 72}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2) a)

	t	t^2	t^3	t^9	t^{18}	t^{36}
Modulo 19	-4	-3	-7	-1	1	1
Modulo 17	4	-1				1

b) $\begin{cases} t^{36} \equiv 1 \pmod{19} \\ t^{36} \equiv 1 \pmod{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^{36} - 1 \equiv 0 \pmod{19} \\ t^{36} - 1 \equiv 0 \pmod{17} \end{cases}$

Et puisque 17 et 19 sont premiers entre eux alors $t^{36} - 1 \equiv 0 \pmod{17 \times 19}$

ou encore $t^{36} - 1 \equiv 0 \pmod{323}$ d'où $t^{36} \equiv 1 \pmod{323}$.

c) $t^{30} = \left(t^9\right)^3 \times t^3 \equiv (-1)^3 \times (-7) \equiv 7 \pmod{19}$

$t^{30} = \left(t^2\right)^{15} \equiv (-1)^{15} \equiv -1 \pmod{17}$.

d) $t^{30} + 69 \equiv 7 + 12 \equiv 0 \pmod{19}$ et $t^{30} + 69 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{17}$

Et puisque 17 et 19 sont premiers entre eux donc $t^{30}+69\equiv 0 \pmod{323}$.

e) *2010 est une solution du système (S)*

Donc $2010^{36}\equiv 1 \pmod{323}$ et $2010^{30}\equiv -69 \pmod{323}$

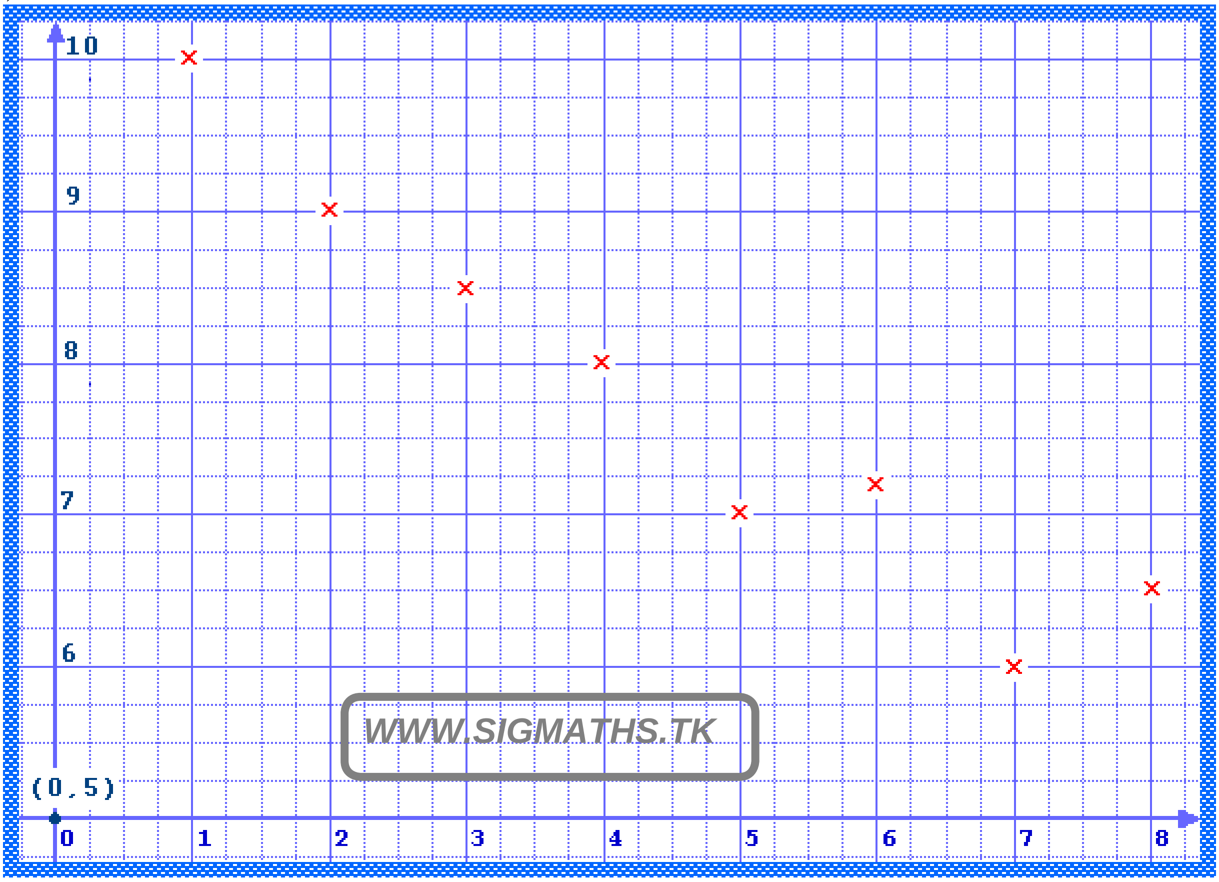
Or $2010 = 55\times 36 + 30$

Donc $2010^{2010} = \left(2010^{36}\right)^{55}\times 2010^{30}\equiv -69\equiv 254 \pmod{323}$

Finalement 254 est le reste de la division euclidienne de 2010^{2010} *par 323.*

Exercice 5

1) a)



b) *Le nuage de points prend une forme allongée autours d'une droite donc la corrélation linéaire entre X et Y est forte ce qui permet de procéder à un ajustement affine.*

2) a) $\overline{X}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i = 4,5$; $V(X)=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i^2-\overline{X}^2=5,25$; $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=2,291$

$\overline{Y}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}y_i = 7,775$; $V(Y)=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}y_i^2-\overline{Y}^2=1,592$; $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=1,262$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i y_i - \overline{X} \times \overline{Y} = -2,775 \quad ; \quad r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = -0,96$$

On a $|r| = 0,96 > \frac{\sqrt{3}}{2}$ *donc un ajustement par la méthode des moindres carrées est justifié.*

3) $D : y = ax + b$ *avec* $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = -0,529$ $b = \overline{Y} - a\overline{X} = 10,154$.

4) Il suffit de calculer Y pour $X = 18$

$Y = -0,529 \times 18 + 10,154 = 0,632\,\%$ *(pourquoi pas !!, espérons qu'il n y aura pas une crise économique mondiale en 2019).*