Epreuve	Devoir de Synthèse n°2	Professeur
Mathématiques	Classe : $4^{ème}$ ScExp	Dhaouadi Nejib
Durée : 3H	Bac blanc 2016	

Exercice 1 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est impaire.

2) Vérifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.

   b) Drésser le tableau de variation de f.

4) Soit x un réel positif .

   a) Montrer que $\forall\, t \in [0, x]$, $0 \le f'(t) \le \dfrac{1}{2}$.

   b) En déduire alors que : $0 \le f(x) \le \dfrac{1}{2} x$.

5) a) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0

   b) Tracer la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque notée g et préciser son domaine de définition D.

   b) Montrer que pour tout $x \in D$, $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

   c) Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ représentation graphique de g

7) On désigne par A l'aire de la région du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$.

   a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = 1 - \dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

   b) En déduire alors que $A = -1 + 4\ln\left(\dfrac{2e}{1+e}\right)$.

Exercice 2 (4 points)

On a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$ et sa tangente au point d'abscisse -1

- La courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$
- L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

1) Par lecture graphique, déterminer :

   a) $f(0)$ et $f'(-1)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2) a) Montrer que $f'(0) = -1$

b) En déduire une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3) a) Montrer que $f(-1) = e$.

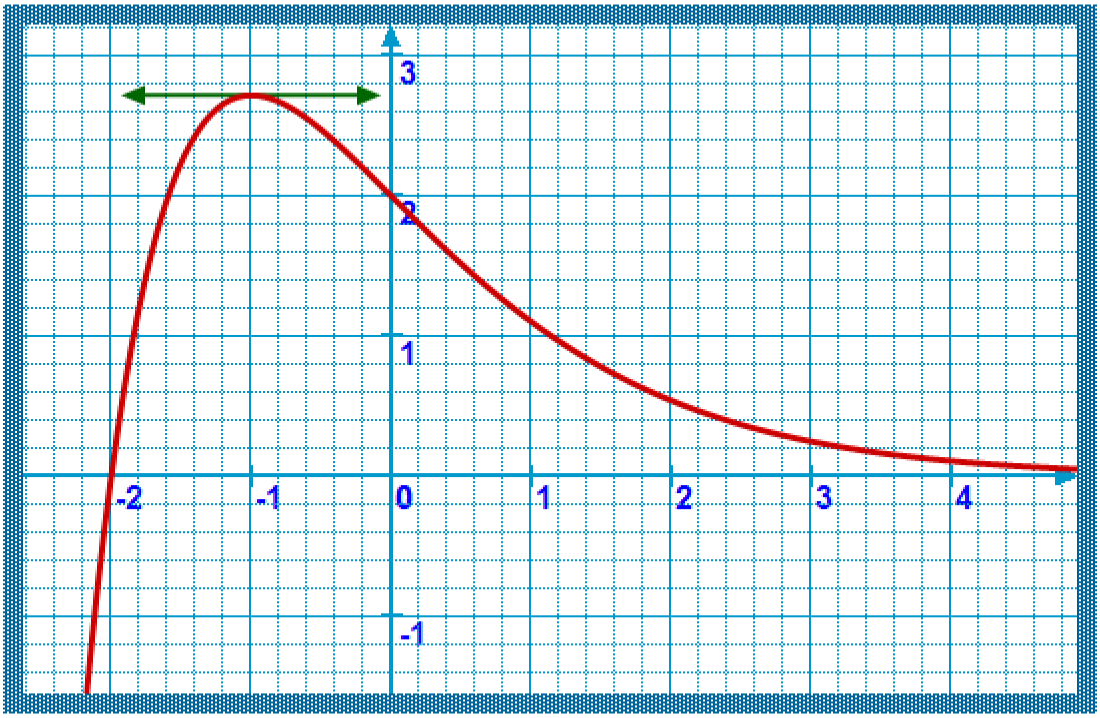
b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

4) a) Montrer que la fonction $u : x \mapsto xe^{-x}$ est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.

c) Montrer qu'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $g - u$ est solution de (E_0). En déduire toutes les solutions de (E).

d) Déterminer alors la fonction f.



Exercice 3 (5 points)

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année de son utilisation est égale à $0,12$.

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.

On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1) Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation?

2) Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1) *Exprimer* $p(Y \leq 1)$ *en fonction de* λ*. En déduire la valeur de* λ*.*

   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$

2) *Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?*
3) *Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?*
4) *On admet que la durée de vie moyenne* d_m *de ces moteurs est égale à* $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$ *où F est la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par* $F(t) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$

   a) *Calculer* $F(t)$ *en fonction de t.*

   b) *En déduire la valeur de* d_m*. On arrondira à* 10^{-1}*.*

Exercice 4 (4.5 points)

N.B : Tous les résultats, dans cet exercice, seront arrondis à 10^{-3}.

Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente à une caisse, dans un hypermarché, en fonction du nombre de caisses ouvertes :

Nombre de caisses ouvertes X	3	4	5	6	8	10	12
Temps moyen d'attente (en minutes) Y	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

1) *Construire le nuage de points correspondant à cette série statistique.*
2) *Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.*
3) a) *Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de cette série.*

   b) *Un ajustement linéaire est-il justifié ?*

   c) *Déterminer une équation de la droite de régression D de y en x.*

4) *La forme du nuage de points suggère d'essayer un ajustement exponentielle.*

   a) *On pose* $Z = ln(Y)$*. Recopier et compléter le tableau suivant :*

X	3	4	5	6	8	10	12
Z							

   b) *Calculer le coefficient de corrélation linéaire r' de la série statistique (X,Z).*

   c) *Déterminer une équation de la droite de régression* Δ *de z en x.*

   d) *Exprimer alors y en fonction de x.*

   e) *Quel est l'ajustement le plus justifié ?*

5) *Estimer le temps moyen d'attente lorsque 15 caisses sont ouvertes.*

BON TRAVAIL

BONNE REUSSITE