# DEVOIR DE SYNTHESE N 2

## Epreuve : Mathématiques

| Durée : 4 heures | Coefficient : 4 | Date : 13/05/2011 |
|---|---|---|

## Exercice n°1

*Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.*

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 1$.

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} ln\left(1+e^{x}\right) = 1$

3) Pour tout entier $n$, $(6n+1)\wedge(15n+2) = 1$.

4) $2^{2011}+1$ est divisible par 3.

## Exercice n°2

*Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier $n$ de l'ensemble $\Omega = \{0,1,...,25\}$ selon le tableau ci-dessous :*

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

*On associe à tout entier $n$ de $\Omega$ le reste de la division euclidienne de $9n+11$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.*

*Exemple : pour coder la lettre P, on procède de la manière suivante :*

*étape 1 : on lui associe l'entier n = 15 (voir tableau).*

*étape 2 : le reste de la division de $9\times 15+11 = 146$ par 26 est 16.*

*étape 3 : on associe 16 à Q (voir tableau).*

*Donc P est codé par la lettre Q.*

*1. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $9n+11$ et $9p+11$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n-p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.*

*2. Coder le mot BAC.*

*3. On se propose de décoder la lettre E.*

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément $n$ de $\Omega$ tel que $9n \equiv 19 \quad (mod\ 26)$.

b. Déterminer $n$.

c. Décoder alors la lettre $E$.

4. Y'a-t-il une lettre invariante par ce codage? Justifier.

## Exercice n°3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(3,0,1)$, $B(0,-1,2)$ et $C(1,-1,0)$.

1) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit D le point de coordonnées $(1,1,-2)$.

a) Calculer le produit scalaire $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) En déduire le volume du tétraèdre ABCD

3) a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par D et parallèle au plan (ABC).

b) Montrer que pour tout point M du plan Q le volume du tétraèdre ABCM est constant.

4) Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) et K le point définie par: $\overrightarrow{DK} = k\overrightarrow{DH}$ où $k$ est un réel de l'intervalle $]0,1[$. On note $P_k$ le plan passant par K et parallèle au plan (ABC).

a) Déterminer les coordonnées de H.

b) Déterminer une équation du plan $P_k$.

c) Le plan $P_k$ coupe $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$ respectivement en $A'$, $B'$ et $C'$.

Déterminer $k$ pour que le volume du tétraèdre $A'B'C'D$ soit la moitié de celui du tétraèdre ABCD.

## Exercice n°4

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

(On ne cherchera pas à expliciter f(x))

1) Justifier que $f$ est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Montrer que $\mathscr{C}$ passe par O et donner une équation de sa tangente T en ce point.

3) *Pour tout réel x de* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, *on pose* $g(x)=f(Tanx)=\int_0^{Tanx}\frac{1}{1+t^2}\,dt$.

a) *Montrer que g est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *et que* $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ; $g'(x)=1$.

b) *En déduire une expression simple de g(x) en fonction de x.*

4) *Déterminer* $f(1)$ *et* $f\left(\sqrt{3}\right)$.

5) *Pour tout x de* $]0,+\infty[$ ; *on pose*

$$h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_0^{x}\frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

a) *Montrer que h est constante et donner sa valeur.*

b) *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

6) a) *Démontrer que f est une fonction impaire.*

b) *Tracer la tangente T et la courbe* $\mathscr{C}$.

## Exercice n°5

Le tableau suivant recense, par clinique, le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

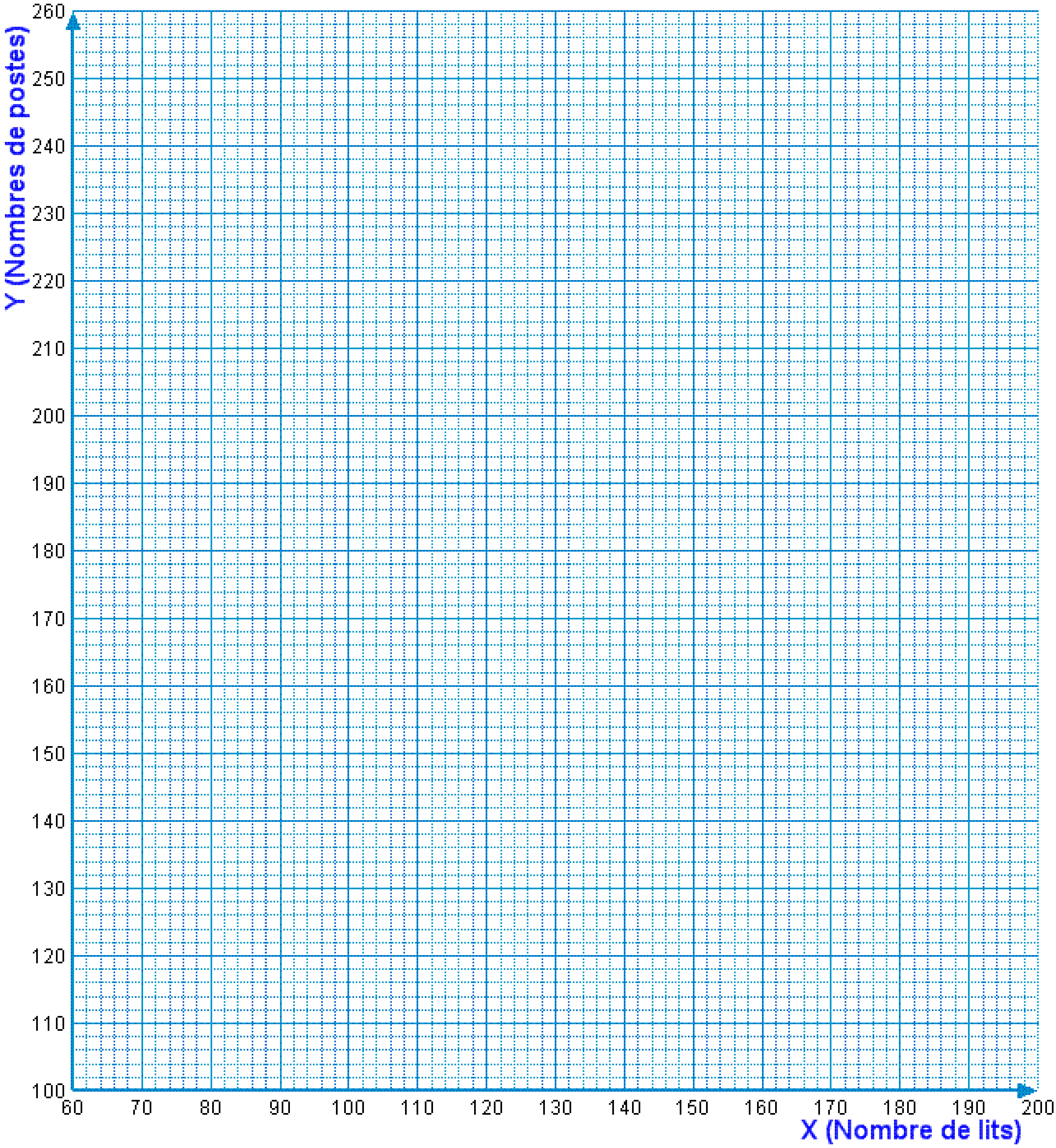
| Nombre lits $X$ | 122 | 177 | 77 | 135 | 109 | 88 | 185 | 128 | 120 | 146 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de postes $Y$ | 205 | 249 | 114 | 178 | 127 | 122 | 242 | 170 | 164 | 188 | 172 |

1. Construire le nuage de points de cette série statistique (voir feuille annexe).
2. Calculer les coordonnées du point moyen $G$ du nuage et le placer sur le graphique.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire $r$.

   Un ajustement affine est-il justifié ?
4. Déterminer une équation de la droite de régression $D$ de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés. Tracer la droite $D$ sur le graphique. (Marquer les points utilisés pour tracer $D$)
5. Une clinique possède 164 lits. En utilisant les résultats de la question 4, à combien peut-on estimer, par calcul, le nombre de postes de personnel non médical ? Illustrer sur le graphique.

## Feuille à rendre avec la copie

**Nom et Prénom :** ........................................................................................ **Classe** ...............



## Correction du Devoir de synthèse n°2

## (Bac blanc 2011)

### Exercice1

**1)Faux.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}2\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=2\times1=2$

**2)Vrai.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(e^x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(e^x(1+e^{-x})\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(\ln e^x+\ln(1+e^{-x})\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)=1$

**3)Vrai.** $5(6n+1)-2(15n+2)=1$

$\Rightarrow(6n+1)\wedge(15n+2)=1$

4) **Vrai.** $2\equiv-1\ (mod3)$ donc $2^{2011}\equiv-1\ (mod3)$

d'où $2^{2011}+1\equiv0\ \ (mod3)$

### Exercice n°2

1)

$9n+11\equiv9n+11\ (mod26)\Leftrightarrow9(n-p)\equiv0\ (mod26)$

Or $9\wedge26=1$ donc $n-p\equiv0\ (mod26)$ (L de Gauss)

ou encore $n-p=26k\ \ (k\in\mathbb{Z})$

Et puisque $(n,p)\in\{0,1,\dots,25\}^2$

alors $n-p\in\{-25,-24,\dots,24,25\}$

ou encore $|n-p|=26|k|<26$

Donc $k=0$ et ensuite $n=p$

2) <u>Codage de la lettre B</u>

❖ On associe à B l'entier $n=1$

❖ $9\times1+11=20\equiv20\quad(mod26)$

❖ à 20 on associe la lettre U.

<u>Codage de la lettre A</u>

❖ On associe à A l'entier $n=0$

❖ $9\times0+11=11\equiv11\quad(mod26)$

❖ à 11 on associe la lettre L.

<u>Codage de la lettre C</u>

❖ On associe à C l'entier $n=2$

❖ $9\times2+11=29\equiv3\quad(mod26)$

❖ à 3 on associe la lettre D.

Donc le mot "BAC" est codé par le mot "ULD"!!!

3) a) La lettre E est associée à l'entier 4

Donc décoder E revient à déterminer l'entier n de $\Omega$ tel que $9n+11\equiv4\ (mod26)$

$9n+11\equiv4\ (mod26)\Leftrightarrow9n\equiv-7\equiv19\ (mod26)$

b)

$9n\equiv19\ (mod26)\Leftrightarrow3\times9n=3\times19\Leftrightarrow27n\equiv57\ (mod26)$

Or

$27\equiv1\ (mod26)$ et $57\equiv5\ (mod26)$ donc on obtient $n\equiv5\ (mod26)$ et puisque $n\in\Omega$ donc $n=5$.

c) L'entier 5 est associé à la lettre F (voir tableau)

Donc E est décodé par F.

4)

$9n+11\equiv n\ (mod26)\Leftrightarrow8n+11\equiv0\ (mod26)$

$\Leftrightarrow8n\equiv-11\equiv15\ (mod26)\Leftrightarrow8n=26k+15\ ;k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow2(4n-13k)=15\Rightarrow2$ divse 15 ce qui est impossible

Donc aucune lettre est invariante par ce codage.

### Exercice n°3

1) $\vec n=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$.

$\vec n\neq\vec0\Rightarrow$ les points A, B et C ne sont pas alignés.

$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\vec n\cdot\overrightarrow{AM}=0$

Ce qui donne $\boxed{(ABC):2x-5y+z-7=0}$

2) a) $\vec n\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}=-12$.

b) $Volume(ABCD)=\dfrac{1}{6}\left|\vec n\cdot\overrightarrow{AD}\right|=2\ \ u.v$

3) a) $Q\ //\ P$ et $D\in Q$ donc $M\in Q\Leftrightarrow\vec n\cdot\overrightarrow{DM}=0$

$M\in Q\Leftrightarrow2(x-1)-5(y-1)+(z+2)=0$

Donc $\boxed{P:2x-5y+z+5=0}$

b) Soit M(x, y, z) un point du plan Q

$Volume(ABCM)=\dfrac{1}{6}\left|\vec n\cdot\overrightarrow{AM}\right|=\dfrac{|2x-5y+z-7|}{6}$

Or $M\in Q\Leftrightarrow2x-5y+z=-5$

Donc $Volume(ABCM)=\dfrac{|-5-7|}{6}=2\ \ u.v$

4) a) H(x,y,z) projeté $\perp$ de D sur (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{DH}=\alpha\vec n$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $H\in(ABC)$

$$\overrightarrow{DH}=\alpha\vec n\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\alpha\\y-1=-5\alpha\\z+2=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=1-5\alpha\\z=-2+\alpha\end{cases}$$

$H(1+2\alpha,1-5\alpha,-2+\alpha)\in(ABC)$

$\Leftrightarrow2(1+2\alpha)-5(1-5\alpha)+\alpha-2=0\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{2}{5}$

Donc $\boxed{H\left(\dfrac{9}{5},-1,-\dfrac{8}{5}\right)}$

b) $K(x,y,z)$ tel que $\overrightarrow{DK}=k\overrightarrow{DH}$

$$\text{Alors}\quad\begin{cases}x=k\left(\dfrac{9}{5}-1\right)+1=\dfrac{4}{5}k+1\\y=k(-1-1)+1=-2k+1\\z=k\left(-\dfrac{8}{5}+2\right)-2=\dfrac{2}{5}k-2\end{cases}$$

$P_k\ //\ (ABC)$ et passant par K

Donc $M(x,y,z)\in P_k\Leftrightarrow\vec n\cdot\overrightarrow{KM}=0$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{4}{5}k-1\right)-5\left(y+2k-1\right)+z-\frac{2}{5}k+2=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-5y+z+5-12k=0$$

Donc $\boxed{P_k\ :\ 2x-5y+z+5-12k=0}$

c)

$\overrightarrow{DK}=k\overrightarrow{DH} \Rightarrow K$ est l'image de $H$ par l'homothétie $h$ de centre $D$ et de rapport $k$

En plus $K\in P_k$ et $P_k \parallel (ABC)$ donc

$P_k = h((ABC))$

$A'\in (DA)\cap P_k \Rightarrow A'=h(A)$ de même on a

$B'=h(B)$ et $C'=h(C)$.

Donc le tétraèdre $A'B'C'D$ est l'image du tétraèdre $ABCD$ par $h$.

Alors $Volume(A'B'C'D)=k^3\times Volume(ABCD)$

$$k^3\times Volume(ABCD)=\frac{1}{2}\times Volume(ABCD)$$

$$\Leftrightarrow k^3=\frac{1}{2} \Leftrightarrow k=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{car} \quad k\in\,]0,1[$$

## Exercice n°4

1) La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$ ;

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $f(0)=0 \Rightarrow O\in\mathscr{C}$ et $T : y=f'(0)x+f(0)=x$

3) $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction Tangente est dérivable sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $g$ est dérivable sur $I$. Et pour tout $x\in I$ ;

$g'(x)=Tan'(x)\times f'(Tanx)=Tan'(x)\times\varphi(Tanx)$

$$\text{Donc}\quad g'(x)=\left(1+Tan^2x\right)\times\frac{1}{1+Tan^2x}=1$$

b) On a : $\forall x\in I ; g'(x)=1$ et puisque $g(0)=0$.

Alors $\forall x\in I;\quad g(x)=\int_0^x 1dt=[t]_0^x=x$

$$4)\ f(1)=f\left(Tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\text{et}\quad f(\sqrt{3})=f\left(Tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

5) Pour tout $x>0,\ h(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) $h$ dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$ on a:

$$h'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}.f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=0$$

Donc $h$ est une fonction constante et pour tout $x>0,\ h(x)=h(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

$$b)\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ f\ \text{continue en}\ 0\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)=0$$

Pour tout $x>0$; $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

6) a) $\varphi$ est une fonction paire donc pour tout réel $x$

$$\int_{-x}^{x}\varphi(t)dt=2\int_0^x\varphi(t)dt \Leftrightarrow \left[f(t)\right]_{-x}^{x}=2f(x)$$

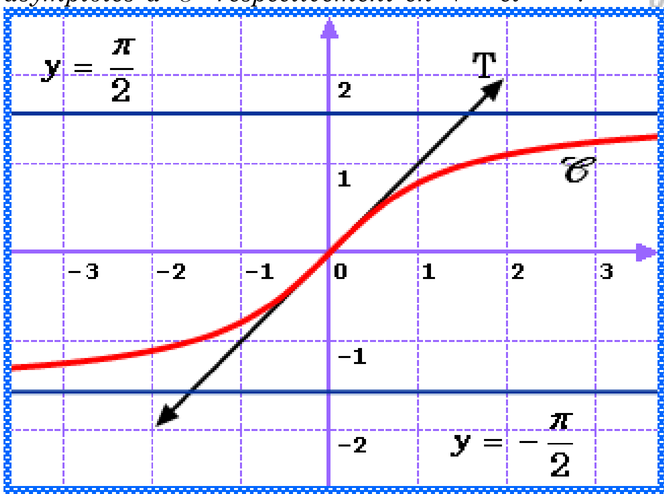
$$\Leftrightarrow f(x)-f(-x)=2f(x)\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$$

Donc $f$ est impaire.

b)

$f$ est impaire donc la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère $O$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$

Les droites d'équations $y=\dfrac{\pi}{2}$ et $y=-\dfrac{\pi}{2}$ sont deux asymptotes à $\mathscr{C}$ respectivement en $+\infty$ et $-\infty$.




## Exercice n°5

1)

2) $G(126,09;175,55)$

$$3)\ r=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=0,92$$

$|r|\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ donc un ajustement affine est justifié.

4) $D : y=ax+y$ avec $a=\dfrac{cov(X,Y)}{V(X)}=1,21$

Et $b=\overline{Y}-a\overline{X}=22,78$

5) $1,21\times 164+22,78\simeq 221$

Pour x=164 lits, il faut environ 221 postes