Epreuve

Mathématiques

Durée : 4H

Devoir de synthèse n°3

Classe : 4ème Math

Professeur

Dhaouadi Nejib

Mai 2015

## Exercice 1 (5,5 points)

*Pour tout entier naturel non nul n, on pose* $I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x\,dx$.

1) *A l'aide d'une intégration par parties, calculer* $I_1$.

2) *Montrer que pour tout entier naturel non nul n;* $0 \le I_n \le \dfrac{2^n}{n!}\left(e^2-1\right)$.

3) *Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel non nul n on a :* $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

4) *Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n on a :*

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$$

5) *Pour tout entier naturel non nul n, on pose* $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

a) *Calculer* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *et montrer que pour tout entier* $n \ge 3$, $u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}u_n$.

b) *Déduire que pour tout entier* $n \ge 3$, $0 \le u_n \le u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.

c) *Déterminer alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *et puis montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

6) *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \dots + \dfrac{2^n}{n!}\right)$.

## Exercice 2 (3 points)

*On considère l'équation différentielle* $(E) : y'' + 36y = 0$.

1) *Donner les solutions de* $(E)$.

2) *Déterminer la fonction g solution de* $(E)$ *qui satisfait aux conditions suivantes :*

- *La courbe représentative de g passe par le point* $A\left(0,\sqrt{3}\right)$.
- *La tangente à la courbe représentative de g au point A a pour coefficient directeur 6.*

3) *Vérifier que pour tout réel x;* $g(x) = 2\sin\left(6x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

4) *Calculer la valeur moyenne de g sur* $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$

## Exercice 3 (4 points)

*On rappel que le plan médiateur d'un segment $[AB]$ non reduit à un point est le plan passant par son milieu et perpendiculaire à la droite (AB) c'est aussi l'ensemble des points M de l'espace tels que MA = MB .*

*Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(4,2,0)$, $B(1,1,-4)$, $C(1,3,0)$ et $D(-3,-2,3)$.*

1) Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) Montrer que le plan P médiateur du segment $[AB]$ admet pour équation cartésienne $3x+y+4z-1=0$.

3) Donner une équation cartésienne du plan Q médiateur du segment $[AC]$.

4) Montrer que $P \cap Q$ est la droite $\Delta$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1-2\alpha \\ y = -2-6\alpha \quad ; \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 3\alpha \end{cases}$$

5) Soit S la sphère circonscrit au tétraèdre ABCD. On note I son centre.

a) Justifier que $I \in \Delta$.

b) En déduire les coordonnées de I

c) Donner une équation cartésienne de la sphère S.

## Exercice 4 (4 points)

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25% au premier fournisseur et 75% au second. La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et 2% chez le second.

On note :

* D l'évènement « le composant est défectueux »;
* $F_1$ l'évènement « le composant provient du premier fournisseur »;
* $F_2$ l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1) a) Dessiner un arbre de probabilité.

b) Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0,0225$.

c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur.

Dans la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à $10^{-3}$ près.

2) Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux.

3) La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

a) Sachant que $p(X > 5) = 0,325$ ; déterminer $\lambda$.

Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.

b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a dèja duré plus de 3 ans ?

## Exercice 5 (3,5 points)

Soient $p$ et $q$ deux entiers naturels non nuls tels que $p \wedge q = 1$.

On considère, dans $\mathbb{Z}$, le système $(S) : \begin{cases} x \equiv a \pmod{p} \\ x \equiv b \pmod{q} \end{cases}$ ; avec $a$ et $b$ des entiers

1) a) Montrer qu'il existe un couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $pu_0 + qv_0 = 1$.

b) Montrer que l'entier $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ est une solution du système $(S)$.

2) a) Soit $x$ une solution du système $(S)$. Montrer que $x \equiv x_0 \pmod{pq}$.

b) Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv x_0 \pmod{pq}$. Montrer que $x$ est une solution du système $(S)$.

c) Déduire alors l'ensemble des solutions du système $(S)$.

3) Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, le système suivant : $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{13} \\ x \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}$

# CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°3

## Exercice 1

1) $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^2 (2-x)e^x dx = \int_0^2 (2-x)e^x dx$ on pose $\begin{cases} u(x) = 2-x \Rightarrow u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^x \Leftarrow v(x) = e^x \end{cases}$

$= \left[(2-x)e^x\right]_0^2 + \int_0^2 e^x dx = -2 + \left[e^x\right]_0^2 = -2 + e^2 - 1 = \boxed{-3+e^2}$

2) $0 \le x \le 2 \Leftrightarrow -2 \le -x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 2-x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le (2-x)^n \le 2^n \Leftrightarrow 0 \le (2-x)^n e^x \le 2^n e^x$

Donc $0 \le \int_0^2 (2-x)^n e^x\, dx \le \int_0^2 2^n e^x\, dx \Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x\, dx \le \frac{2^n}{n!}\left[e^x\right]_0^2 = \frac{2^n}{n!}\left(e^2-1\right)$

Alors $\boxed{0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!}\left(e^2-1\right).}$

3) $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x\, dx$ On pose $\begin{cases} u(x) = (2-x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = -(n+1)(2-x)^n \\ v'(x) = e^x \qquad \Leftarrow v(x) = e^x \end{cases}$

$= \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[(2-x)^{n+1}e^x\right]_0^2 + (n+1)\int_0^2 (2-x)^n e^x\, dx\right) = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^2 (2-x)^n e^x\, dx$

$\Leftrightarrow I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x\, dx \Leftrightarrow \boxed{I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}$

4) <u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$; $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + I_1 = 3 + I_1$ vraie car $I_1 = -3 + e^2$ d'après 1).

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$ et montrons que

$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

On a $I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n \Rightarrow I_n = I_{n+1} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ Or $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

En replaçant $I_n$ par sa valeur on obtient $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

5) a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \times \cancel{2^n} \times \cancel{n!}}{(n+1) \times \cancel{n!} \times \cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \Rightarrow \boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1}}$

$n \ge 3 \Leftrightarrow n+1 \ge 4 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1} \le \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n, \forall\, n \ge 3}$

b) $\begin{cases} u_4 \le \frac{1}{2}u_3 \\ u_5 \le \frac{1}{2}u_4 \\ \dots \\ u_n \le \frac{1}{2}u_{n-1} \end{cases}$

En faisant le produit membre à membre on obtient l'inégalité suivante : $u_4\, u_5 \dots u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u_3 u_4 \dots u_{n-1}$ or $u_n = \frac{2^n}{n!} > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Donc après simplification de l'inégalité précédente on obtient

$\boxed{u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u_3.}$

c) $\begin{cases} \text{Pour tout entier } n \geq 3 ; 0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} u_3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} u_3 = 0 \text{ car } \dfrac{1}{2} \in \left]-1,1\right[ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{la suite } (u_n) \text{ est convergente} \\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0. \end{array}\right.$

$D'\text{après } 2) \text{ on a } 0 \leq I_n \leq \dfrac{2^n}{n!}\left(e^2-1\right) \text{ donc } 0 \leq I_n \leq u_n\left(e^2-1\right)$

$\begin{cases} \text{Pour tout entier } n \geq 1, 0 \leq I_n \leq u_n\left(e^2-1\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u_n(e^2-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{la suite } (I_n) \text{ est convergente} \\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} I_n = 0. \end{array}\right.$

6) $1+\dfrac{2}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}+\ldots+\dfrac{2^n}{n!} = e^2 - I_n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}+\ldots+\dfrac{2^n}{n!}\right) = e^2.$

## Exercice 2

1) L'équation $(E)$ est de la forme $y''+w^2y=0$ avec $w=6$.

Les solutions sont de la forme $f : x \mapsto A\cos 6x + B\sin 6x$ où $A$ et $B$ des réels.

2) La courbe représentative de $g$ passe par le point $A\left(0,\sqrt{3}\right) \Rightarrow g(0)=\sqrt{3}=x_0$.

La tangente à la courbe représentative de $g$ au point $A$ a pour coefficient directeur $6 \Rightarrow g'(0)=6=y_0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{y_0}{w}\sin wx + x_0\cos wx = \sin 6x + \sqrt{3}\cos 6x.$

3) $2\sin\left(6x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\left(\sin 6x.\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 6x.\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2}\sin 6x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 6x\right)$

$= \sin 6x + \sqrt{3}\cos 6x = g(x).$

4) $\overline{g} = \dfrac{1}{\frac{\pi}{6}-0}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x)\,dx = \dfrac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sin\left(6x+\dfrac{\pi}{3}\right)dx = \dfrac{12}{\pi}\left[-\dfrac{1}{6}\cos\left(6x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= -\dfrac{2}{\pi}\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{-2}{\pi}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$

## Exercice 3

1) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & -4 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -9-9-76 \neq 0$

Donc les points $A, B, C$ et $D$ ne sont pas coplanaires.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $P \Rightarrow P : -3x-y-4z+d=0$

$J = A*B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-2\right) \in P \Rightarrow -\frac{15}{2}-\frac{3}{2}+8+d=0 \Leftrightarrow -9+8+d=0 \Leftrightarrow d=1$

$P: -3x-y-4z+1=0$ ou encore $\boxed{P: 3x+y+4z-1=0}$

3) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $Q \Rightarrow Q: -3x+y+d'=0$

$H = A*C\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},0\right) \in Q \Rightarrow -\frac{15}{2}+\frac{5}{2}+d'=0 \Leftrightarrow -5+d'=0 \Leftrightarrow d'=5$

$Q: -3x+y+5=0$ ou encore $\boxed{Q: 3x-y-5=0}$

4) $3x+y+4z-1 = 3(1-2\alpha)+(-2-6\alpha)+4(3\alpha)-1 = 3-6\alpha-2-6\alpha+12\alpha-1=0 \Rightarrow \Delta \subset P$

$3x-y-5 = 3(1-2\alpha)-(-2-6\alpha)-5 = 3-6\alpha+2+6\alpha-5=0$ donc $\Delta \subset Q$

En plus $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (sinon A, B, C et D seront coplanaires)

Donc P et Q sont sécants et $P \cap Q = \Delta$.

5) a) S est la sphère circonscrit au tétraèdre ABCD et I son centre.

Le plan médiateur P du segment $[AB]$ c'est l'ensemble des points M tq $MA = MB$.

Le plan médiateur Q du segment $[AC]$ c'est l'ensemble des points M tq $MA = MC$.

On a $IA = IB = IC$ donc $I \in P$ et $I \in Q$ d'où $I \in P \cap Q = \Delta$.

b) $I \in \Delta \Rightarrow I(1-2\alpha,-2-6\alpha,3\alpha)$. A et D sont deux points de S $\Leftrightarrow IA = ID \Leftrightarrow IA^2 = ID^2$

$\Leftrightarrow (1-2\alpha-4)^2+(-2-6\alpha-2)^2+(3\alpha)^2 = (1-2\alpha+3)^2+(-2-6\alpha+2)^2+(3\alpha-3)^2$

$\Leftrightarrow (-2\alpha-3)^2+(-6\alpha-4)^2+(3\alpha)^2 = (-2\alpha+4)^2+(-6\alpha)^2+(3\alpha-3)^2$

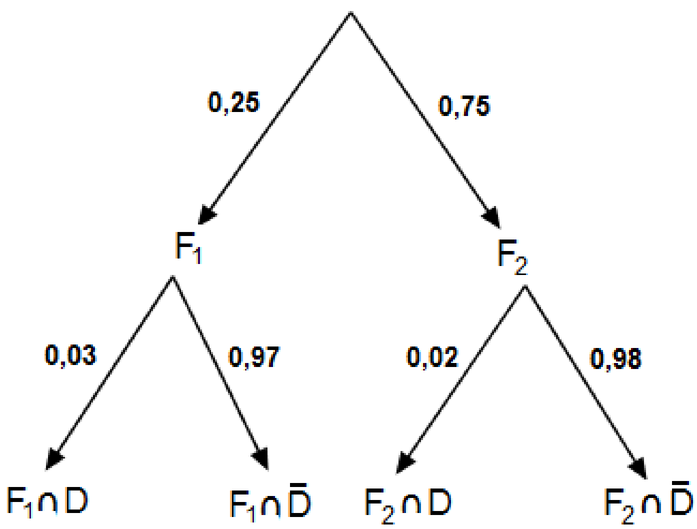
$\Leftrightarrow \cancel{4\alpha^2}+12\alpha+\cancel{9}+\cancel{36\alpha^2}+48\alpha+\cancel{16}+\cancel{9\alpha^2} = \cancel{4\alpha^2}-16\alpha+\cancel{16}+\cancel{36\alpha^2}+\cancel{9\alpha^2}-18\alpha+\cancel{9}$

$\Leftrightarrow 60\alpha = -34\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$ ce qui donne $\boxed{I(1,-2,0)}$

c) Le rayon de la sphère S est $IA = \sqrt{25}$ donc $\boxed{S: (x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = 25}$

## Exercice 4

1) a)



b) $p(F_1 \cap D) = p(F_1) \times p(D/F_1) = 0,25 \times 0,03 = \boxed{0,0075}$.

$p(F_2 \cap D) = p(F_2) \times p(D/F_2) = 0,75 \times 0,02 = \boxed{0,015}$

D'après la formule des probabilités totales $p(D) = p(F_1 \cap D) + p(F_2 \cap D) = 0,0225$.

c) $p(F_1/D) = \dfrac{p(F_1 \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,0075}{0,0225} = \dfrac{75}{225} = \dfrac{1}{3}$.

2) Le choix des 20 composants commandés est une suite de 20 épreuves identiques et indépendantes, ainsi le nombre des composants défectueux suit une loi binomiale $X$ de paramètres $n = 20$ et $p = 0,0225$.

Donc $p(X \geq 2) = 1 - p\left(\overline{X \geq 2}\right) = 1 - p(X < 2) = 1 - \left(p(X = 0) + p(X = 1)\right)$

$$= 1 - C_{20}^0 (0,0225)^0 (1 - 0,0225)^{20} - C_{20}^1 (0,0225)^1 (1 - 0,0225)^{19}$$

$$= 1 - (0,9775)^{20} - 20 \times (0,0225) \times (0,9775)^{19} \simeq 0,074.$$

3) a) $p(X > 5) = 0,325 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,325 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln(0,325) \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln(0,325)}{5} \simeq 0,225.$

b) $p(X \leq 8) = 1 - e^{-8\lambda} = 1 - e^{-8 \times 0,225} \simeq 0,835.$

$p(X \geq 8) = e^{-8\lambda} = e^{-8 \times 0,225} \simeq 0,165.$

c) $p((X \geq 8)/(X \geq 3)) = \dfrac{p((X \geq 8) \cap (X \geq 3))}{p(X \geq 3)} = \dfrac{p(X \geq 8)}{p(X \geq 3)} = \dfrac{e^{-8\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-5 \times 0,225} \simeq 0,325.$

## Exercice 5

1) a) $p \wedge q = 1$ donc d'après l'identité de Bezout, il existe $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tq $pu_0 + qv_0 = 1$

b) $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

$bpu_0 \equiv 0 \pmod p$ et $qv_0 = 1 - pu_0 \equiv 1 \pmod p \Rightarrow x_0 \equiv 0 + a \times 1 \equiv a \pmod p \quad (*)$

$aqv_0 \equiv 0 \pmod q$ et $pu_0 = 1 - qv_0 \equiv 1 \pmod q \Rightarrow x_0 \equiv b \times 1 + 0 \equiv b \pmod q \quad (**)$

$(*)$ et $(**) \Rightarrow x_0$ et une solution du système (S).

2) a) $x$ solution de (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv a \pmod p \\ x \equiv b \pmod q \end{cases}$ et on a $\begin{cases} x_0 \equiv a \pmod p \\ x_0 \equiv b \pmod q \end{cases}$ donc $\begin{cases} x \equiv x_0 \pmod p \\ x \equiv x_0 \pmod q \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 \equiv 0 \pmod p \\ x - x_0 \equiv 0 \pmod q \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Rightarrow x - x_0 \equiv 0 \pmod{pq} \Rightarrow x \equiv x_0 \pmod{pq}$$

b) $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv x_0 \pmod{pq} \Rightarrow x = pqk + x_0, k \in \mathbb{Z}$

Donc $x \equiv x_0 \pmod p$ et $x \equiv x_0 \pmod q \Rightarrow x \equiv a \pmod p$ et $x \equiv b \pmod q$

Alors $x$ est une solution du système (S).

c) D'après a) et b) : $x$ solution du système (S) $\Leftrightarrow x \equiv x_0 \pmod{pq}$

Donc l'ensemble des solutions du système (S) est $\{pqk + x_0, k \in \mathbb{Z}\}$

3) Résolution, dans $\mathbb{Z}$, du système : $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{13} \\ x \equiv 4 \pmod 9 \end{cases}$

- $13 \wedge 9 = 1$ donc on cherche un couple d'entiers $(u_0, v_0)$ tel que $13u_0 + 9v_0 = 1$

*On remarque que le couple* $(-2,3)$ *convient.*

- $x_0 = bpu_0 + aqv_0 = 4\times 13\times(-2) + 7\times 9\times 3 = 85$ *et on a* $13\times 9 = 117$.
- *L'ensemble des solutions est* $\{117k + 85, k \in \mathbb{Z}\}$