

Epreuve

Mathématiques

Durée : 3H

Devoir de synthèse n°3Classe : 4^{ème} ScExp

Mai 2014

Professeur

Dhaouadi

Nejib

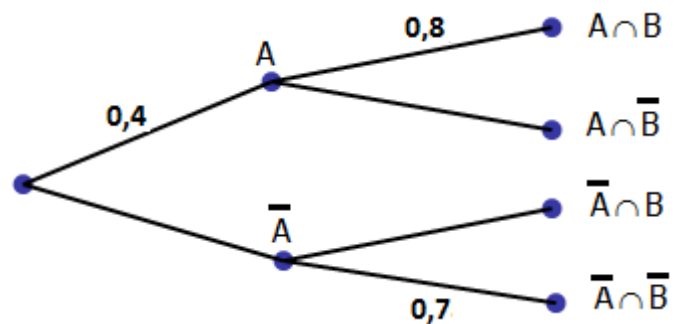
Exercice 1 (3points)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question, la lettre correspondante à la réponse choisie et une justification de cette réponse.

1) On considère l'arbre de probabilité ci-contre.

La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à :

- a) 0,64 b) 0,8 c) 0,32



2) On considère, pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale : $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$.

Une intégration par parties permet de trouver une relation entre I_n et I_{n+1} .

Quelle est cette relation ?

- a) $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} + \frac{n+1}{2} I_n$ b) $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$ c) $I_{n+1} = 2e^2 - 2(n+1)I_n$

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\ln(2x-3)}{\ln(x-1)}$

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Exercice 2 (4,5 points)

L ' espace est rapporté à un repère orthonormé.

On donne le plan P d'équation cartésienne $y + z + 1 = 0$ et l'ensemble S des points

$M(x, y, z)$ de L ' espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 3 = 0$

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

2) Montrer que $S \cap P$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

- 3) a) Vérifier que le point $A(2, 1, 0)$ appartient à la sphère S .
- b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à S en A .
- 4) a) Vérifier que les plans P et Q sont perpendiculaires.
- b) Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta = P \cap Q$.

Exercice 3 (3,5 points)

Dans un lot de pièces de monnaie 30% sont des pièces de un dinar dont 5% sont des fausses monnaies et 70% sont des pièces de cinq dinars dont 2% sont des fausses monnaies.

1) On prend une pièce au hasard dans ce lot et on considère les événements suivants :

F : "La pièce est fausse."

U : "La pièce est de un dinar."

C : "La pièce est de cinq dinars."

- a) Décrire la répartition des pièces de monnaie à l'aide d'un arbre pondéré.
- b) Montrer que $p(F) = 0,029$.
- c) Déterminer $p(C/F)$.
- 2) On décide de contrôler un lot de 1000 pièces de cinq dinars.
- On suppose que le processus de contrôle est assimilée à des tirages avec remise
- Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de pièces fausses dans ce lot.
- a) Définir la loi de probabilité de X .
- b) Quel est, en moyenne, le nombre de pièces fausses?

Exercice 4 (3 points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + y = 2 \sin x$.

1) Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = a \cos x + b \sin x$ où a et b deux réels.

Déterminer les réels a et b pour lesquels φ est une solution de (E) .

2) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.

3) Soit g une fonction définie sur \mathbb{R} .

Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si $g - \varphi$ est une solution de (E') .

4) Dédurre alors les solutions g de l'équation différentielle (E) .

Exercice 5 (6 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et interpréter les résultats obtenus.

2) a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que le point $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe \mathcal{C} .

4) a) Donner une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

b) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

c) Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + 1) - f(x)$.

Montrer que φ est croissante sur \mathbb{R} et déduire que $f(x) \leq \frac{1}{2}(x + 1)$ pour tout $x \geq 0$.

5) Tracer \mathcal{C} et T .

6) Soit α un réel strictement positif. On note $A(\alpha)$ l'aire de la région limitée par la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations $y = 1$, $x = 0$ et $x = \alpha$.

a) Montrer que $A(\alpha) = -\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2\alpha}) + \frac{1}{2} \ln 2$.

b) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat trouvé.

7) a) Montrer que f réalise est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Tracer la courbe représentative \mathcal{C}' de la fonction f^{-1} dans le même repère que \mathcal{C} .

Correction du devoir de synthèse n°3 4scExp

Exercice 1 (3points)

$$1) a) p(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B/A)}{p(A)p(B/A) + p(\bar{A})p(B/\bar{A})} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,3} = 0,64$$

$$2) b) \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = x^{n+1} \Rightarrow u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = e^{2x} \Leftarrow v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases} \Rightarrow I_{n+1} = \left[\frac{1}{2} e^{2x} x^{n+1} \right]_0^1 - \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{2x} dx$$

$$\text{Donc } I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

$$3) c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2(x-1)-1)}{\ln(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1) \left(2 - \frac{1}{x-1} \right)}{\ln(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1) + \ln \left(2 - \frac{1}{x-1} \right)}{\ln(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln \left(2 - \frac{1}{x-1} \right)}{\ln(x-1)} = 1$$

Exercice 2 (4,5 points)

$$1) x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z+1)^2 - 1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$$

$\Rightarrow S$ est la sphère de centre $I(1, 2, -1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

$$2) d = d(I, P) = \frac{|2 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow S \cap P \text{ est un cercle de rayon } = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 1$$

Soit $H(x, y, z)$ son centre. Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P

H est le projeté orthogonal de I sur le plan $P \Leftrightarrow \overline{IH} = \lambda \vec{n}$ et $H \in P$.

$$\overline{IH} = \lambda \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ y-2 = \lambda \\ z+1 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{En plus } H \in P \Leftrightarrow y + z + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 2 + \lambda + (-1 + \lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \\ \text{Donc } \boxed{H(1, 1, -2)} \end{array} \right.$$

$$3) a) (2-1)^2 + (1-2)^2 + (0+1)^2 = 1+1+1 = 3 \Rightarrow A \in S.$$

b) Q tangent à S en $A \Leftrightarrow \overline{IA}$ vecteur normal à Q et $A \in Q$

$$M(x, y, z) \in Q \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{IA} = 0 \Leftrightarrow (x-2) - (y-1) + z = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 1 = 0$$

$$\boxed{Q : x - y + z - 1 = 0}$$

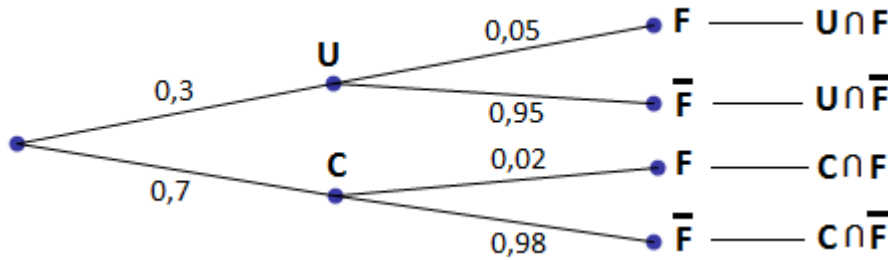
$$4) a) \vec{n} \cdot \overline{IA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0 \Rightarrow P \text{ et } Q \text{ sont orthogonaux.}$$

$$b) P \cap Q = \Delta \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda \in \mathbb{R} \\ y = -1 - z = -1 - \lambda \\ x = 1 + y - z = 1 - 1 - \lambda - \lambda = -2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Donc $\Delta : \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 3 (3,5 points)

1) a)



b) D'après la formule des probabilité totales

$$p(F) = p(U \cap F) + p(C \cap F) = p(U) p(F/U) + p(C) p(F/C) = 0,3 \times 0,05 + 0,7 \times 0,02 = \boxed{0,029}$$

$$c) p(C/F) = \frac{p(C \cap F)}{p(F)} = \frac{p(C) p(F/C)}{p(F)} = \frac{0,7 \times 0,02}{0,029} \approx 0,483$$

2) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,029$

a) $\forall k \in \{0, 1, \dots, 1000\}, p(X = k) = C_{1000}^k (0,029)^k (0,971)^{1000-k}$

b) $E(X) = np = 1000 \times 0,029 = 29$

Exercice 4 (3 points)

1) φ est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -a \sin x + b \cos x$.

$$\varphi'(x) + \varphi(x) = -a \sin x + b \cos x + a \cos x + b \sin x = (b - a) \sin x + (a + b) \cos x$$

$$\varphi \text{ est une solution de (E) ssi pour tout } x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) + \varphi(x) = 2 \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $a = -1$ et $b = 1$ donc $\varphi(x) = -\cos x + \sin x$.

2) Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ke^{-x} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

3) g solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) + g(x) = 2 \sin x = \varphi'(x) + \varphi(x)$

ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, (g - \varphi)'(x) + (g - \varphi)(x) = 0 \Leftrightarrow g - \varphi$ est une solution de (E')

4) g solution de (E) $\Leftrightarrow g - \varphi$ est une solution de (E') $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (g - \varphi)(x) = ke^{-x}$

Donc pour tout réel $x, \boxed{g(x) = \varphi(x) + ke^{-x} = -\cos x + \sin x + ke^{-x} \text{ où } k \in \mathbb{R}.}$

Exercice 5 (6 points)

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{0}{1} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}e^{2x}}{e^{-2x}(1 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{-2x} + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$

$$2) a) f'(x) = \frac{2e^{2x}(1 + e^{2x}) - 2e^{2x}e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}.$$

b)

b)	$-\infty$	$+\infty$
x		
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

$$3) \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x}e^{-2x}}{e^{2x}(1 + e^{-2x})} = \frac{1}{e^{2x} + 1} = \frac{(1 + e^{2x}) - e^{2x}}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = 1 - f(x).$$

Donc $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe \mathcal{C} .

$$4) a) T : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{donc } \boxed{T : y = \frac{1}{2}(x + 1)}$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \frac{1}{2} = \frac{2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} - \frac{1}{2} = \frac{4e^{2x} - 1 - 2e^{2x} - e^{4x}}{2(1 + e^{2x})^2} = \frac{-1 + 2e^{2x} - e^{4x}}{2(1 + e^{2x})^2}$$

$$= -\frac{1 - 2e^{2x} + e^{4x}}{2(1 + e^{2x})^2} = -\frac{(1 - e^{2x})^2}{2(1 + e^{2x})^2} \leq 0.$$

Donc pour tout réel x , $\boxed{f'(x) \leq \frac{1}{2}}$.

$$c) \forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{2} - f'(x) \geq 0 \Rightarrow \varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.$$

Donc $x \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + 1) - f(x) \geq 0.$

D'où pour $x \geq 0$ on a $f(x) \leq \frac{1}{2}(x + 1)$ (La courbe \mathcal{C} est au dessous de T sur $[0, +\infty[$).

5) Voir figure.

$$6) a) A(\alpha) = \int_0^\alpha (1 - f(x))dx = \int_0^\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right) dx = \left[x - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x})\right]_0^\alpha$$

$$= \alpha - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2\alpha}) + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} [2\alpha - \ln(e^{2\alpha}(e^{-2\alpha} + 1))] + \frac{1}{2} \ln 2$$

$$= \frac{1}{2} [2\alpha - \ln(e^{2\alpha}) - \ln(e^{-2\alpha} + 1)] + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} [2\alpha - 2\alpha - \ln(e^{-2\alpha} + 1)] + \frac{1}{2} \ln 2$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(e^{-2\alpha} + 1) + \frac{1}{2} \ln 2$$

b) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = \frac{1}{2} \ln 2$ car $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^{-2\alpha} = 0$.

Interprétation : L'aire de la region limitée par la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations

$$y = 1 \text{ et } x = 0 \text{ est égale à } \frac{1}{2} \ln 2 \text{ unité d'aire}$$

7) a) f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} donc f réalise une bijection de \mathbb{R} sur l'intervalle $J = f(\mathbb{R}) =]0, 1[$.

b) Soient $x \in]0, 1[$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(x) = y$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow e^{2y} = x + xe^{2y} \Leftrightarrow (1 - x)e^{2y} = x \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{x}{1 - x}$$

$$\Leftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{x}{1 - x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{1 - x}\right) \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{1 - x}\right)}$$

c)

